Geometria

Unità 2 Il teorema di Pitagora

Le conoscenze che devi avere

- Le proprietà dei poligoni
- Il concetto di figure equivalenti

Le abilità che devi avere

- Usare i procedimenti per determinare le aree delle figure
- Operare con le radici quadrate

Le conoscenze che acquisirai

- Il teorema di Pitagora
- Le terne pitagoriche
- Importanza della sintesi e della formalizzazione

Le abilità che acquisirai

- Applicare il teorema di Pitagora per risolvere problemi
- Rafforzare l'assimilazione del concetto di figure equivalenti
- Incrementare la capacità di saper valutare "varianti e invarianti"
- Incrementare la familiarità all'uso corretto delle formule
- Approfondire la conoscenza dei numeri razionali
- Incrementare la capacità di risoluzione dei problemi

Lezioni

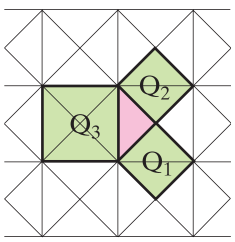
Simulazione n. 50

1 LEZIONE

Che cos'è il teorema di Pitagora

La leggenda narra che Pitagora, passeggiando su un pavimento di piastrelle tutte uguali tra loro e aventi la forma di triangoli rettangoli isosceli, fosse colpito da alcune particolarità.
Si dice che da queste osservazioni sia arrivato poi alla formulazione del suo celebre teorema. In realtà gli storici della Matematica non sono certi che le cose siano andate proprio così.

Proviamo comunque a ripetere anche noi le osservazioni di Pitagora riportate dalla leggenda.

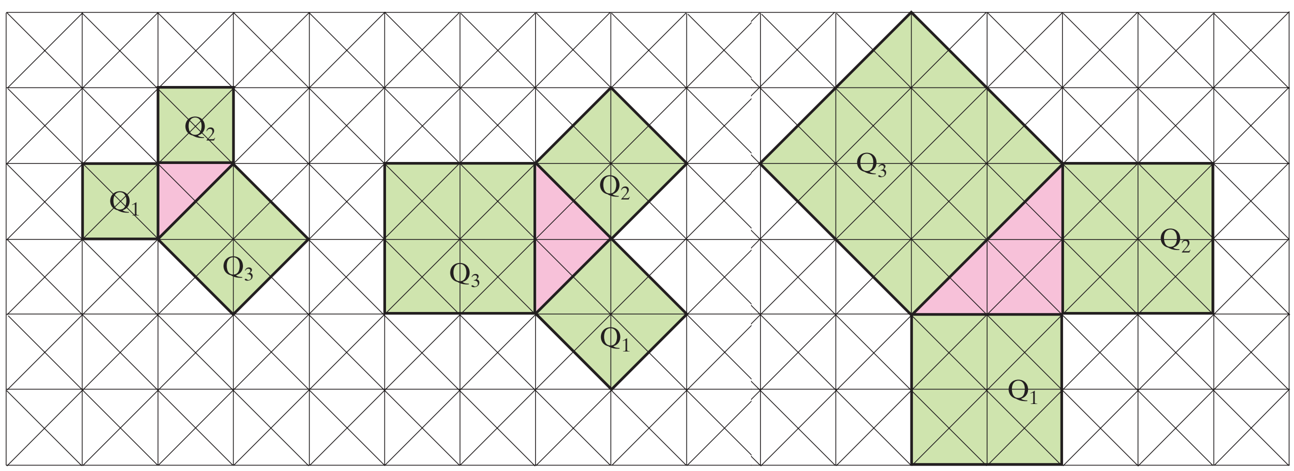


Rappresentiamo un pavimento costituito da piastrelle aventi la forma di un triangolo rettangolo isoscele e fissiamo l'attenzione sulla piastrella rosa.
Osserviamo i quadrati verdi: Q_1 e Q_2 hanno per lato il cateto della piastrella; Q_3 ha per lato l'ipotenusa della piastrella. Q_1 e Q_2 sono formati ciascuno da due piastrelle, mentre Q_3 è formato da 4 piastrelle.
Prendiamo una **piastrella** come unità di misura delle aree. Possiamo allora scrivere:

Area Q_1 = 2 piastrelle   Area Q_2 = 2 piastrelle   Area Q_3 = 4 piastrelle

Consideriamo ora altri triangoli rettangoli isosceli formati da più piastrelle. Per ognuno disegniamo i quadrati che hanno come lati i cateti e l'ipotenusa dei triangoli.

Cabri
ESERCITAZIONE N. 33 A PAG. 302



Area Q_1 = 4 piastrelle
Area Q_2 = 4 piastrelle
Area Q_3 = 8 piastrelle

Area Q_1 = 8 piastrelle
Area Q_2 = 8 piastrelle
Area Q_3 = 16 piastrelle

Area Q_1 = 16 piastrelle
Area Q_2 = 16 piastrelle
Area Q_3 = 32 piastrelle

Osserviamo che in ogni situazione l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Vediamo ora di staccarci dall'immagine delle piastrelle con considerazioni più generali.
Disegna un triangolo rettangolo isoscele qualunque e i quadrati che hanno come lati i cateti e l'ipotenusa del triangolo; traccia le linee sottili come in figura (meglio è se disegni le figure su cartoncini colorati ed esegui effettivamente i tagli e le sovrapposizioni per i confronti). Osserva che il quadrato costruito sull'ipotenusa è composto dallo stesso numero di elementi congruenti (triangoli rettangoli isosceli) che compongono complessivamente i due quadrati costruiti sui cateti.
Possiamo allora generalizzare:

→ *in un triangolo rettangolo isoscele, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Un po' di storia

Pitagora e la scuola pitagorica

Pitagora nacque nell'isola greca di Samo attorno al 580 a.C. (la data non è certa). Fece molti viaggi in Oriente e in Egitto, poi si stabilì a Crotone, una colonia greca di quella che oggi è l'Italia meridionale, all'epoca Magna Grecia, dove fondò una scuola.

Questa scuola aveva forse più le caratteristiche di una comunità di tipo religioso o, ancora meglio, di una setta vera e propria. I seguaci erano infatti tenuti ad appartenere alla scuola per tutta la vita e a mantenere segrete le conoscenze acquisite.

La figura di Pitagora è circondata da una fama leggendaria e misteriosa: ben poco di quanto è stato riportato ha un valido fondamento storico.

Certo è che nella sua scuola ci si occupò di filosofia, matematica, magia, musica e astronomia. Le dottrine elaborate da Pitagora e dai discepoli erano un misto di razionalità e di misticismo.

Rappresentazione di Pitagora in una miniatura del XV secolo.

Consideriamo dapprima alcuni aspetti della **parte razionale**.

"Tutto è numero" è il motto con il quale ancor oggi si sintetizza il pensiero della scuola pitagorica. I seguaci erano infatti convinti dell'importanza suprema dei numeri nell'origine dell'universo. Secondo loro, quindi, ogni tipo di conoscenza doveva avere come base la conoscenza dei numeri, poiché tutta la realtà era esprimibile mediante numeri interi o razionali (cioè, come già sai, esprimibili sotto forma di frazione).

Persino la musica era governata da leggi matematiche. I pitagorici espressero infatti la lunghezza dei suoni che compongono un'armonia musicale mediante frazioni ($1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}$). Questa modalità è ancor oggi in uso, anche se con ampliamenti e modificazioni.

Vediamo ora invece alcuni aspetti della **parte mistica**.

I pitagorici credevano nella trasmigrazione dell'anima, ossia erano convinti che le anime degli uomini e degli animali si reincarnassero dopo la morte in altri uomini o animali. Pitagora era probabilmente giunto a questa concezione derivandola dalla religione indiana durante uno dei suoi viaggi in Oriente. A tal proposito Senofane racconta che Pitagora durante una passeggiata sgridò un uomo che percuoteva un cane con un bastone: "Smettila, stai percuotendo un mio caro amico! Lo riconosco dai lamenti!".

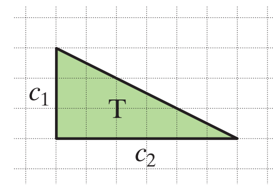
I seguaci della scuola si imponevano inoltre una rigida disciplina, anche mediante regole un po' bizzarre: era infatti assolutamente proibito indossare abiti di lana o mangiare fave, nonostante si professasse la necessità di osservare una rigida dieta vegetariana per purificare lo spirito.

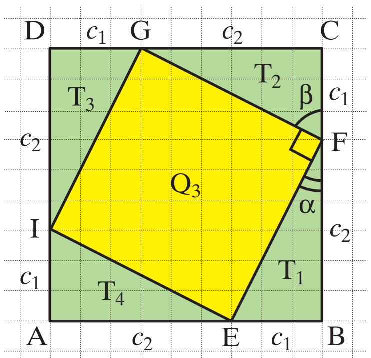
La scuola pitagorica ebbe inoltre una caratteristica che la rese diversa da tutte le altre scuole filosofiche greche: ammetteva le donne come ascoltatrici! ■

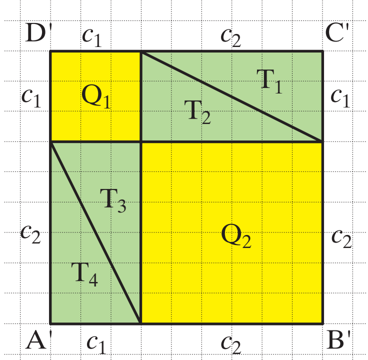
Particolare di una tavola del 1496 in cui si ripropongono le teorie di Pitagora per spiegare le basi dell'armonia musicale.

ESERCIZI → pag. 138

Le osservazioni sulle piastrelle appassionarono molto Pitagora, che proseguì i suoi studi, trovando la relazione che lega i cateti e l'ipotenusa di un **triangolo rettangolo qualunque**.
Troviamo ora anche noi questa relazione.
Disegniamo un triangolo rettangolo T qualunque.
Disegniamo ora due quadrati congruenti, ABCD e A'B'C'D', che abbiano come lato la somma dei cateti del triangolo rettangolo.







Sui lati del primo quadrato ABCD riportiamo le misure dei cateti, come nella figura a fianco.
Congiungiamo i punti E, F, G, I. Il quadrato iniziale risulta così scomposto nei 4 triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3, T_4 e nel quadrato Q_3.
I triangoli rettangoli T_1, T_2, T_3, T_4 sono congruenti tra loro e anche al triangolo T, infatti hanno:

- un angolo retto, perché è un angolo del quadrato ABCD;
- i cateti congruenti a quelli di T.

Q_3 è un quadrato, ha infatti:

- tutti i lati congruenti all'ipotenusa di T e quindi congruenti tra loro;
- tutti gli angoli retti (ognuno è supplementare alla somma di α e di β, che è 90°).

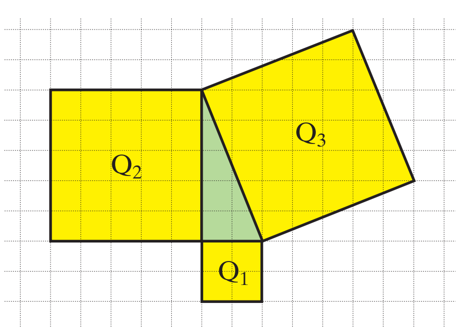
Anche sui lati del secondo quadrato A'B'C'D' riportiamo le misure dei cateti, e suddividiamolo come nella figura a fianco.
Il quadrato risulta così scomposto in:

- 4 triangoli rettangoli congruenti tra loro e congruenti al triangolo T;
- due quadrati Q_1 e Q_2: Q_1 ha come lato il cateto c_1, Q_2 ha come lato il cateto c_2.

Osserviamo che:

- togliendo dal secondo quadrato "grande" A'B'C'D' i 4 triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, si ottiene la somma dei quadrati Q_1 e Q_2;
- togliendo dal primo quadrato "grande" ABCD i 4 triangoli T_1, T_2, T_3, T_4, si ottiene il quadrato Q_3.

Possiamo allora concludere che il quadrato Q_3, che ha per lato l'ipotenusa di T, è equivalente alla somma dei quadrati Q_1 e Q_2, che hanno per lati rispettivamente i cateti c_1 e c_2 di T.
Abbiamo trovato dunque la relazione che lega i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, nota a tutti come **teorema di Pitagora**:



→ *in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.*

Ricordando le nostre conoscenze sulle figure equivalenti, possiamo enunciare il teorema di Pitagora in quest'altro modo:

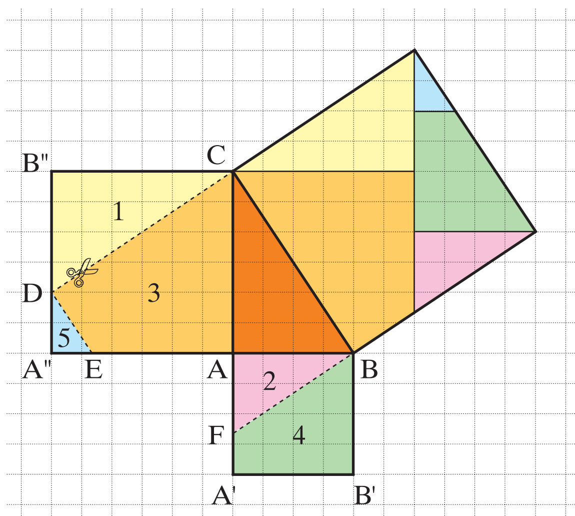
→ *in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.*

$$\text{Area } Q_1 + \text{Area } Q_2 = \text{Area } Q_3$$

Laboratorio

UN'ALTRA VIA PER ARRIVARE ALLA RELAZIONE DI PITAGORA

Su un foglio di cartoncino disegna un triangolo rettangolo qualunque.
Disegna anche i quadrati che hanno per lati i cateti e l'ipotenusa.
Dal vertice C del triangolo prolunga il lato del quadrato costruito sull'ipotenusa, fino a incontrare in D il lato A"B".
Da D traccia la parallela a BC fino a incontrare in E il lato AA".
Dal vertice B prolunga il lato BB" fino a incontrare AA' in F.
Ritaglia le parti che si sono così costituite, ossia 1, 2, 3, 4, 5 e ricomponile come suggerito dalla figura sul quadrato che ha per lato l'ipotenusa.

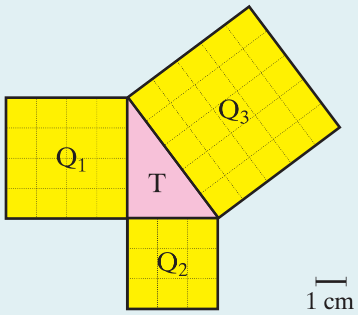


A quale conclusione puoi arrivare?

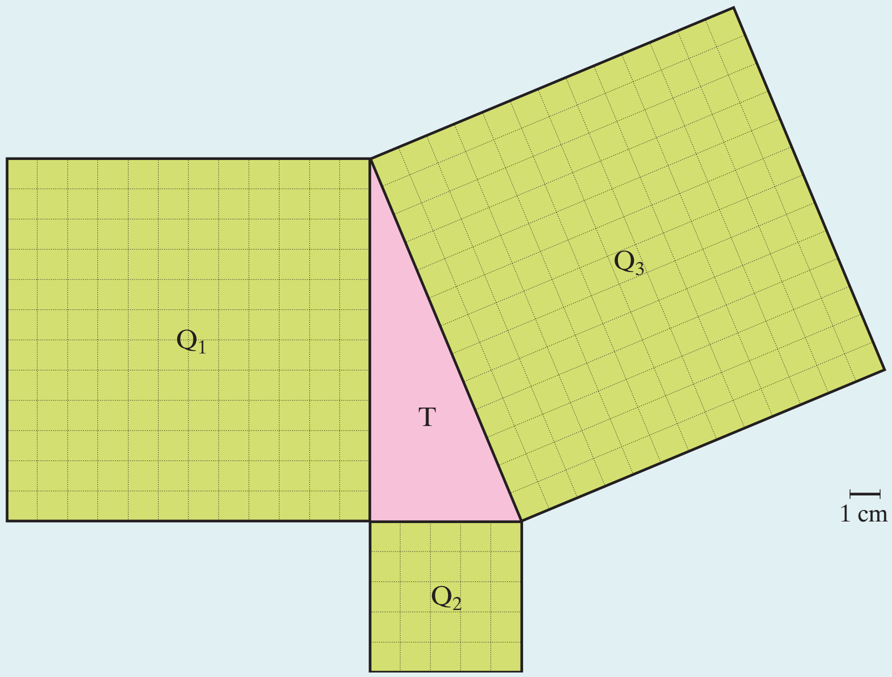
....

....

1 Costruisci il triangolo rettangolo T e i quadrati su cartoncini colorati, in modo analogo alle figure, usando come unità di misura il centimetro.



Area Q_1 = ... cm^2
Area Q_2 = ... cm^2
Area Q_3 = ... cm^2
Area Q_3 = ... + ...

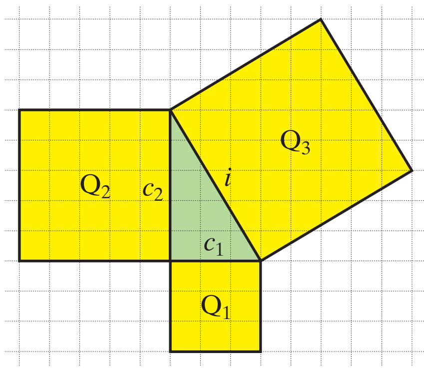


2 Costruisci il triangolo T e i quadrati su cartoncini colorati, in modo analogo alle figure, usando come unità di misura il centimetro.

Area Q_1 = ... cm^2
Area Q_2 = ... cm^2
Area Q_3 = ... cm^2
Area Q_3 = ... + ...

ESERCIZI → pag. 138

2 LEZIONE
Le formule del teorema di Pitagora



Riprendiamo la relazione che abbiamo trovato alla fine della Lezione precedente:

Area Q_1 + Area Q_2 = Area Q_3

Ricordando le formule dell'area del quadrato, possiamo anche scrivere in linguaggio simbolico:

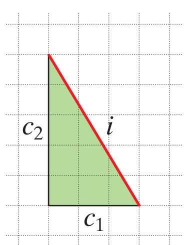
$$c_1^2 + c_2^2 = i^2$$

dalla quale possiamo ricavare:

$$c_1^2 = i^2 - c_2^2$$

$$c_2^2 = i^2 - c_1^2$$

Vediamo ora come possono essere sfruttate queste relazioni per risolvere problemi.

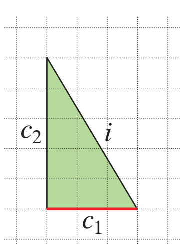


Supponiamo di conoscere le lunghezze dei due cateti, che indichiamo un c_1 e c_2, di un triangolo rettangolo e di voler trovare la lunghezza dell'ipotenusa, che chiamiamo i.
Riprendiamo la relazione precedente:

$$i^2 = c_1^2 + c_2^2$$

L'uguaglianza resterà valida se estraiamo la radice quadrata di entrambi i membri:

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$

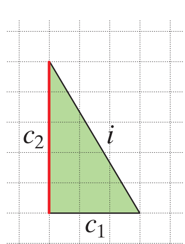


Se invece conosciamo le lunghezze di un cateto e dell'ipotenusa, per trovare la lunghezza dell'altro cateto possiamo riprendere la relazione:

$$c_1^2 = i^2 - c_2^2$$

per passare poi all'uguaglianza delle radici quadrate:

$$c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2}$$



Analogamente:

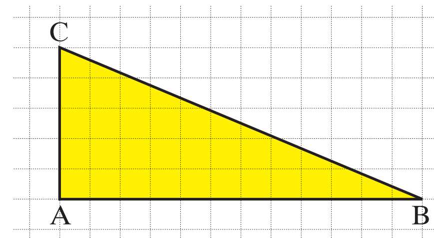
$$c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$$

Riassumiamo le formule trovate.
Se indichiamo con i, c_1 e c_2 le lunghezze dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo, si ha:

$$i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \qquad c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2} \qquad c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$$

Esercizi risolti

1 ***In un triangolo rettangolo i cateti misurano 5 cm e 12 cm. Determina la lunghezza dell'ipotenusa.***



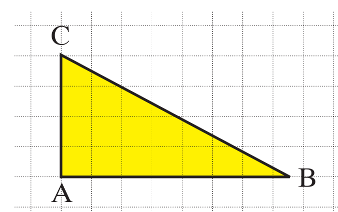
Dati	**Domanda**
$\overline{AB} = 12$ cm	$\overline{BC} = ?$
$\overline{AC} = 5$ cm	

Ricordando la relazione di Pitagora $i^2 = c_1^2 + c_2^2$, puoi scrivere:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$$

da cui: $\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{(5\ \text{cm})^2 + (12\ \text{cm})^2} = \sqrt{25\ \text{cm}^2 + 144\ \text{cm}^2} = \sqrt{169\ \text{cm}^2} = 13\ \text{cm}$

2 ***In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 17 cm e un cateto misura 8 cm. Determina la lunghezza dell'altro cateto.***



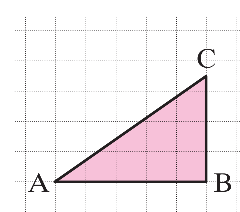
Dati	**Domanda**
$\overline{CB} = 17$ cm	$\overline{AB} = ?$
$\overline{AC} = 8$ cm	

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{AC}^2$$

da cui:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{AC}^2} = \sqrt{(17\ \text{cm})^2 - (8\ \text{cm})^2} = \sqrt{289\ \text{cm}^2 - 64\ \text{cm}^2} = \sqrt{225\ \text{cm}^2} = 15\ \text{cm}$$

3 ***In un triangolo rettangolo i cateti sono lunghi 7 cm e 10 cm. Determina la lunghezza dell'ipotenusa.***



$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{(7\ \text{cm})^2 + (10\ \text{cm})^2} = \sqrt{49\ \text{cm}^2 + 100\ \text{cm}^2} =$$

$$= \sqrt{149\ \text{cm}^2} \approx 12{,}2\ \text{cm}$$

4 I cateti di un triangolo rettangolo misurano 12 cm e 16 cm. Determina la misura dell'ipotenusa. [20 cm]

5 I cateti di un triangolo rettangolo misurano 21 mm e 20 mm. Determina la misura del perimetro. [70 mm]

6 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 25 cm e un cateto 7 cm. Determina l'area del triangolo. [84 cm^2]

7 In un triangolo rettangolo un cateto e l'ipotenusa misurano rispettivamente 20 mm e 20,5 mm. Determina la lunghezza del perimetro. [45 mm]

ESERCIZI → pag. 139

3 LEZIONE

Le terne pitagoriche

Se tre numeri interi sono tali che il quadrato del maggiore dei tre è uguale alla somma dei quadrati degli altri due, si dice che formano una **terna pitagorica**.
Infatti quei tre numeri possono essere considerati come le lunghezze (espresse ovviamente nella stessa unità di misura) dei lati di un triangolo rettangolo.

Ecco alcuni esempi di terne pitagoriche:

3	**4**	**5**	infatti	$5^2 = 3^2 + 4^2$	$(25 = 9 + 16)$
5	**12**	**13**	infatti	$13^2 = 5^2 + 12^2$	$(169 = 25 + 144)$
8	**15**	**17**	infatti	$17^2 = 8^2 + 15^2$	$(289 = 64 + 225)$
7	**24**	**25**	infatti	$25^2 = 7^2 + 24^2$	$(625 = 49 + 576)$

Queste terne sono dette **primitive**, perché sono formate da **numeri primi tra loro**.

Da ognuna di queste terne se ne possono ottenere infinite altre, moltiplicando tutti e tre i componenti della terna per uno stesso numero.

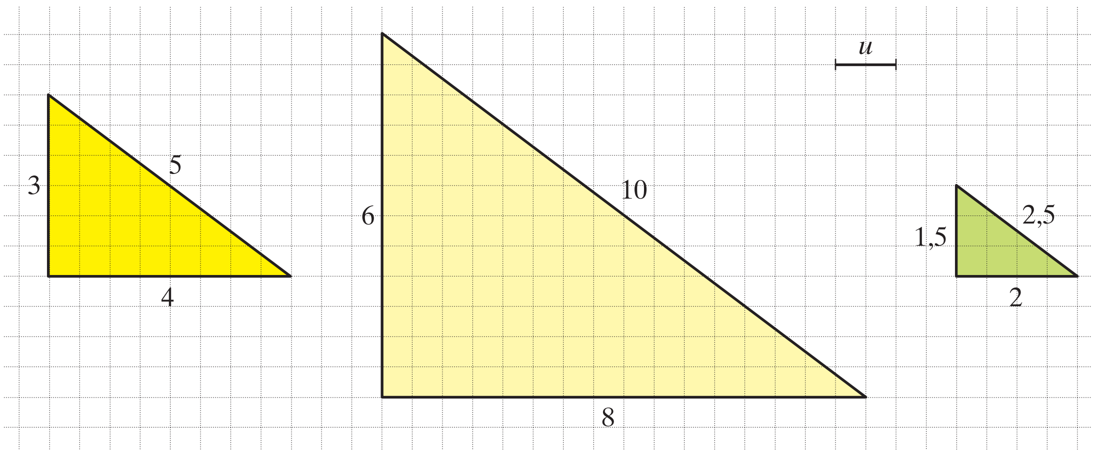
Prendiamo ad esempio la terna 3 4 5.

Moltiplichiamo per 2 ogni componente della terna; otteniamo: 6 8 10.
Questa è un'altra terna pitagorica, infatti: $10^2 = 6^2 + 8^2$ $(100 = 36 + 64)$

Moltiplichiamo per 7 ogni componente della stessa terna; otteniamo: 21 28 35.
Anche questa è una terna pitagorica, infatti: $35^2 = 21^2 + 28^2$ $(1225 = 441 + 784)$

Dividendo invece ogni componente di una terna primitiva per uno stesso numero si ottengono tre numeri, non più interi, ma decimali. Tali numeri possono essere comunque considerati come le misure dei lati di un triangolo rettangolo, poiché verificano la relazione pitagorica.

Se ad esempio dividiamo per 2 ogni componente della terna 3, 4, 5, otteniamo: 1,5 2 2,5.
Per essi vale ancora la relazione pitagorica: $2{,}5^2 = 1{,}5^2 + 2^2$. $(6{,}25 = 2{,}25 + 4)$



Se a, b, c è una terna di numeri, scritti in ordine crescente, che rappresenta le misure dei lati di un triangolo, **per stabilire se tale triangolo è rettangolo oppure no** basterà verificare se a, b, c formano una terna pitagorica, ossia se $a^2 + b^2 = c^2$.

1 Completa la tabella.

a	*b*	*c*	a^2	b^2	c^2	Terna pitagorica: sì o no?	Terna primitiva: sì o no?
20	21	29					
15	36	39					
7	25	27					
9	40	41					
33	56	65					
40	96	104					
36	48	60					
28	96	100					
33	44	55					

2 Prendi una terna pitagorica primitiva tra quelle considerate finora; moltiplica ogni suo componente per uno stesso numero a tua scelta e verifica se ottieni un'altra terna pitagorica.

3 Le seguenti terne, ad eccezione di una, rappresentano le misure dei lati di un triangolo. Stabilisci quali triangoli sono rettangoli.
(*Attenzione*: individua prima la terna che non può rappresentare i lati di un triangolo e spiega il perché.)

16	30	34	4,5	6	7,5
14	16	18	10	24	26
2,5	5	9,5	7,5	18	19,5

4 Un triangolo ha i lati lunghi 3,5 cm, 12 cm e 12,5 cm. È rettangolo oppure no?

5 Un triangolo ha i lati lunghi 27 cm, 36 cm e 50 cm. È rettangolo oppure no?

6 Un triangolo ha due lati che misurano 9,6 cm e 12,8 cm. Quanto deve essere lungo il terzo lato perché il triangolo sia rettangolo?

Un po' di storia

Le terna pitagorica

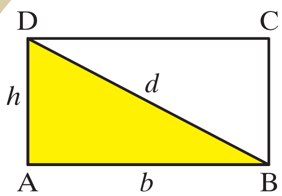
La più famosa terna pitagorica è certamente **3 4 5**.
Già gli Egizi, molto prima di Pitagora, sfruttavano questa terna per disegnare nel terreno angoli perfettamente retti. Erano quindi già a conoscenza del fatto che, se si disegna un triangolo con i lati aventi come misure (rispetto alla stessa unità) 3, 4, 5, esso è certamente rettangolo!
La terna è attualmente usata anche dagli edili e dagli agrimensori per verifiche rapide nei cantieri.

Le forme "squadrate" di questo piccolo tempio mostrano come gli Egizi sapessero padroneggiare l'uso degli angoli retti nelle loro attività.

ESERCIZI → pag. 142

4 LEZIONE Applicazioni del teorema di Pitagora

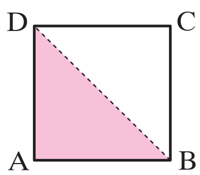
Il teorema di Pitagora può essere applicato ogni volta che, scomponendo una figura, si ottiene un triangolo rettangolo.



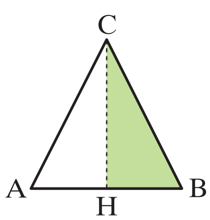
$$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \qquad \overline{AB}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2 \qquad \overline{AD}^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AB}^2$$

$$\overline{DB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} \qquad \overline{AB} = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{AD}^2} \qquad \overline{AD} = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{AB}^2}$$

ossia $d = \sqrt{b^2 + h^2}$ $\qquad b = \sqrt{d^2 - h^2}$ $\qquad h = \sqrt{d^2 - b^2}$

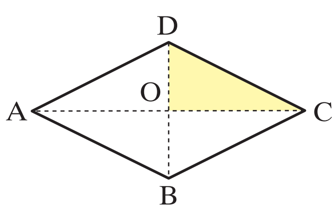


$$\overline{DB}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 \qquad \overline{DB} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2}$$



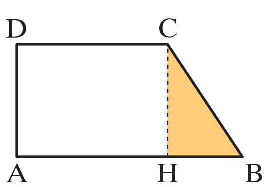
$$\overline{CB}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{HB}^2 \qquad \overline{CH}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{HB}^2 \qquad \overline{HB}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CH}^2$$

$$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2} \qquad \overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2} \qquad \overline{HB} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{CH}^2}$$



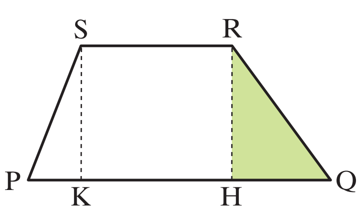
$$\overline{DC}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OC}^2 \qquad \overline{OD}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OC}^2 \qquad \overline{OC}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{OD}^2$$

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{OC}^2} \qquad \overline{OD} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{OC}^2} \qquad \overline{OC} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{OD}^2}$$



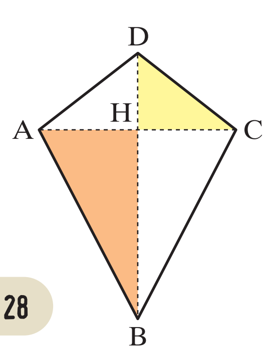
$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2 \qquad \overline{CH}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2 \qquad \overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CH}^2$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{BH}^2} \qquad \overline{CH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{BH}^2} \qquad \overline{BH} = \sqrt{\overline{BC}^2 - \overline{CH}^2}$$



$$\overline{RQ}^2 = \overline{RH}^2 + \overline{QH}^2 \qquad \overline{QH}^2 = \overline{RQ}^2 - \overline{RH}^2 \qquad \overline{RH}^2 = \overline{RQ}^2 - \overline{QH}^2$$

$$\overline{RQ} = \sqrt{\overline{RH}^2 + \overline{QH}^2} \qquad \overline{QH} = \sqrt{\overline{RQ}^2 - \overline{RH}^2} \qquad \overline{RH} = \sqrt{\overline{RQ}^2 - \overline{QH}^2}$$



$$\overline{DC}^2 = \overline{DH}^2 + \overline{HC}^2 \qquad \overline{DH}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{HC}^2 \qquad \overline{HC}^2 = \overline{DC}^2 - \overline{DH}^2$$

$$\overline{DC} = \sqrt{\overline{DH}^2 + \overline{HC}^2} \qquad \overline{DH} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{HC}^2} \qquad \overline{HC} = \sqrt{\overline{DC}^2 - \overline{DH}^2}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HB}^2 \qquad \overline{AH}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{HB}^2 \qquad \overline{HB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2$$

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2} \qquad \overline{AH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{HB}^2} \qquad \overline{HB} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AH}^2}$$

Esercizi guidati

1 ***Determina la lunghezza della diagonale di un rettangolo avente i lati lunghi 20 cm e 48 cm.***

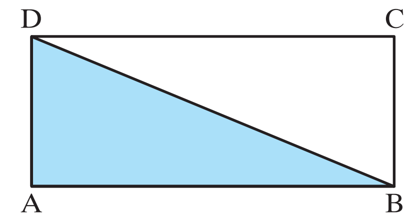
Dati

$\overline{AD} = 20$ cm

$\overline{AB} = 48$ cm

Domanda

$\overline{BD} = ?$



Applica il teorema di Pitagora al triangolo ABD:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2 + \ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \ldots\ldots\ \text{cm}$$

2 ***In un triangolo isoscele un lato obliquo è lungo 34 cm e la base è lunga 32 cm. Determina la lunghezza dell'altezza.***

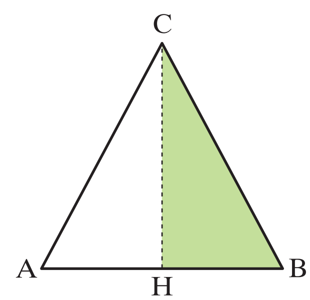
Dati

$\overline{CA} = \overline{CB} = 34$ cm

$\overline{AB} = 32$ cm

Domanda

$\overline{CH} = ?$



Applica il teorema di Pitagora al triangolo HBC:

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \overline{HB}^2} = \sqrt{(\ldots\ldots)^2 - (\ldots\ldots)^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2 - \ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \ldots\ldots\ \text{cm}$$

3 ***Un rombo ha le diagonali lunghe 36 cm e 48 cm. Determina la lunghezza del perimetro del rombo.***

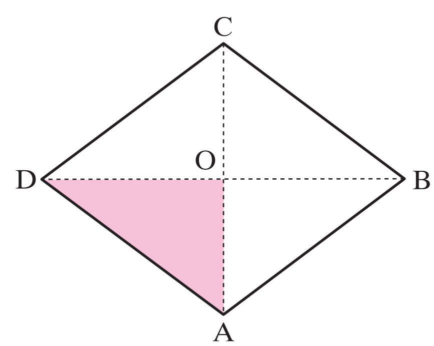
Dati

$\overline{AC} = 36$ cm

$\overline{DB} = 48$ cm

Domanda

$p_{ABCD} = ?$



$\overline{OD} = \ldots\ldots$ cm : $\ldots\ldots = \ldots\ldots$ cm

$\overline{OA} = \ldots\ldots$ cm : $\ldots\ldots = \ldots\ldots$ cm

Applica il teorema di Pitagora al triangolo AOD:

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{OD}^2 + \overline{OA}^2} = \sqrt{(\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots)^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2 + \ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \sqrt{\ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \ldots\ldots\ \text{cm}$$

$p_{ABCD} = \ldots\ldots$ cm $\cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots$ cm

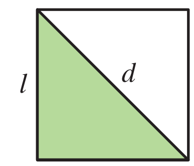
4 In un trapezio rettangolo le basi misurano 19 cm e 7 cm, mentre il lato obliquo misura 12,5 cm. Determina la misura dell'altezza. [3,5 cm]

5 Le basi di un trapezio isoscele misurano 38 cm e 20 cm e l'altezza misura 40 cm. Determina la misura del lato obliquo. [41 cm]

ESERCIZI → pag. 144

5 LEZIONE Alcuni casi particolari

IL QUADRATO



Indichiamo con l la lunghezza del lato e con d quella della diagonale di un quadrato. Consideriamo il triangolo rettangolo colorato, nel quale d rappresenta la lunghezza dell'ipotenusa ed l quella dei due cateti congruenti. Come sappiamo: $d^2 = l^2 + l^2$.

$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} =$ *[per la proprietà: la radice di un prodotto è uguale al prodotto delle radici]*

$= \sqrt{2 \cdot l^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{l^2} = \sqrt{2} \cdot l = l \cdot \sqrt{2}$ *[quest'ultima scrittura ha lo stesso significato di quella immediatamente prima dell'uguale, ma evita di fare confusione]*

→ La lunghezza della diagonale del quadrato si può ottenere moltiplicando la lunghezza del lato per la radice quadrata di 2.

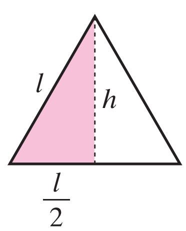
$$d = l \cdot \sqrt{2}$$

Poiché: $l \xrightarrow{\cdot \sqrt{2}} d$ è il **percorso diretto** per determinare la lunghezza della diagonale conoscendo la lunghezza del lato

$l \xleftarrow[: \sqrt{2}]{} d$ è il **percorso inverso** per determinare la lunghezza del lato conoscendo la lunghezza della diagonale.

Quindi: $l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$

IL TRIANGOLO EQUILATERO



Indichiamo con l il lato e con h l'altezza di un triangolo equilatero. Applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo colorato. Le lunghezze dei cateti sono h ed $\dfrac{l}{2}$ e la lunghezza dell'ipotenusa è l.

$h^2 = l^2 - \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 \qquad h = \sqrt{l^2 - \dfrac{l^2}{4}} =$ *[riduciamo allo stesso denominatore le due quantità sotto radice]*

$$= \sqrt{\frac{4\ l^2 - l^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\ l^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}\ \sqrt{l^2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}l}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

→ In un triangolo equilatero l'altezza si può ottenere moltiplicando la metà del lato per la radice quadrata di 3.

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

Poiché: $l \xrightarrow{:2} \dfrac{l}{2} \xrightarrow{\sqrt{3}} h$ è il **percorso diretto** per determinare la lunghezza dell'altezza conoscendo la lunghezza del lato,

$l \xleftarrow[\cdot 2]{} \dfrac{l}{2} \xleftarrow[: \sqrt{3}]{} h$ è il **percorso inverso** per determinare la lunghezza del lato conoscendo la lunghezza dell'altezza.

Quindi: $l = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$

1 Considera un quadrato con il lato di 10 cm. Determina la lunghezza della sua diagonale:
- applicando il teorema di Pitagora a uno dei triangoli rettangoli isosceli in cui la diagonale divide il quadrato;
- applicando la formula riportata a pagina precedente.

2 Un quadrato ha la diagonale che misura 30 cm. Determina la lunghezza del suo perimetro.

3 Un triangolo equilatero ha il lato che misura 6 cm. Determina la lunghezza dell'altezza:
- applicando il teorema di Pitagora a uno dei triangoli rettangoli in cui l'altezza divide il triangolo;
- applicando la formula riportata a pagina precedente.

4 Un triangolo equilatero ha l'altezza lunga 34,6 cm. Determina la lunghezza del suo perimetro.

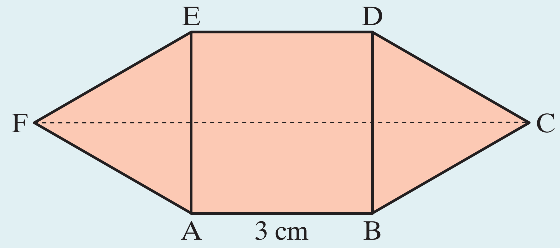
Un po' di storia

Il "mostro" $\sqrt{2}$

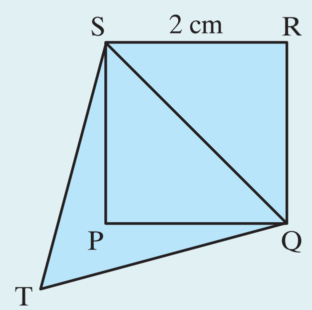
Proprio il teorema di Pitagora, il più famoso teorema attribuito alla scuola pitagorica (anche se già noto a Egizi e Babilonesi), fu in parte la causa della decadenza della scuola.

Applicando infatti il teorema di Pitagora al quadrato per determinarne la lunghezza della diagonale, si trovò che tale diagonale si poteva ottenere moltiplicando il lato per il fattore $\sqrt{2}$.
Ma proprio tra i pitagorici stessi qualcuno si accorse che questo fattore non poteva essere ottenuto da alcun rapporto di numeri interi, ossia non poteva essere il risultato di una divisione tra numeri interi.
L'armonia pitagorica dell'universo, secondo la quale tutta la realtà che circonda l'uomo poteva essere espressa mediante rapporti tra numeri interi, crollò rovinosamente.
Il "*mostro*" $\sqrt{2}$ ne aveva minato le basi!
Leggende diverse si narrano sulla fine dello scopritore di questa "assurdità" nella teoria.
Una leggenda narra che egli perì durante una tempesta, punito dagli dei per aver osato occuparsi di cose divine; un'altra racconta che fu ucciso dai pitagorici stessi per evitare che la pericolosa notizia venisse a conoscenza di tutti gli allievi e quindi poi anche al di fuori della loro cerchia.
Ma la verità non tardò ad affermarsi e contribuì, unitamente a ragioni di ordine politico, a decretare la fine della celebre scuola. ■

5 L'esagono ABCDEF è costituito da un quadrato (ABDE) e da due triangoli equilateri affiancati (AEF e BCD). Osserva la figura, poi calcola la lunghezza della diagonale CF.



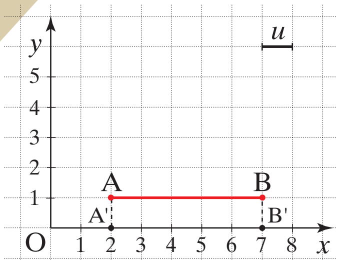
6 Il quadrilatero QRST è costituito da un quadrato (PQRS) e da un triangolo equilatero (QST) parzialmente sovrapposti. Osserva la figura, quindi calcola il perimetro del quadrilatero.



ESERCIZI → pag. 149

6 LEZIONE
Il teorema di Pitagora nel piano cartesiano

Vogliamo determinare la distanza fra due punti rappresentati in un sistema cartesiano.



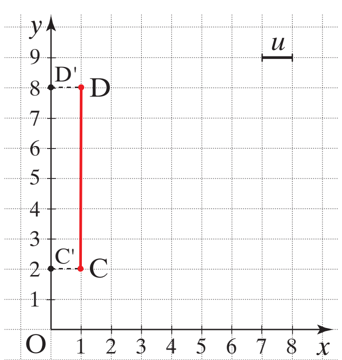
Consideriamo i due punti A(2; 1) e B(7; 1). Essi sono allineati su una semiretta parallela all'asse delle ascisse.
Disegniamo le loro proiezioni sull'asse delle ascisse, indicate con A' e B': si può facilmente constatare che la distanza tra A' e B' è uguale a 5 *u* e che quindi $\overline{A'B'} = 5\,u$.
La distanza tra A e B è ovviamente uguale alla distanza tra A' e B', quindi $\overline{AB} = 5\,u$.
Osserviamo che la misura della distanza dei punti A e B è uguale alla differenza tra le ascisse dei punti:

$$x_B - x_A = 7\,u - 2\,u = 5\,u$$

Simulazione n. 51

In generale:

→ la distanza fra due punti allineati su una semiretta parallela all'asse delle ascisse è uguale alla differenza delle ascisse.

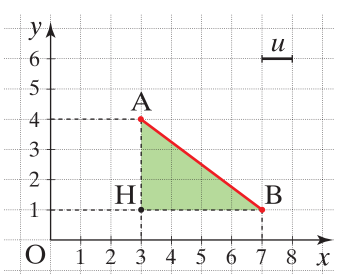


Consideriamo ora i punti C(1; 2) e D(1; 8).
Essi sono allineati su una semiretta parallela all'asse delle ordinate.
Procedendo in modo del tutto analogo a quello precedente, si può facilmente constatare che $\overline{CD} = 6\,u$.
Osserviamo che in questo caso la misura della distanza dei punti C e D è uguale alla differenza tra le ordinate dei punti:

$$y_D - y_C = 8\,u - 2\,u = 6\,u$$

In generale:

→ la distanza fra due punti allineati su una semiretta parallela all'asse delle ordinate è uguale alla differenza delle ordinate.



Consideriamo in ultimo i punti A(3; 4) e B(7; 1).
Essi non sono allineati su una semiretta parallela agli assi. Disegniamo le proiezioni di A e di B su entrambi gli assi.
Si viene così a formare il triangolo rettangolo HBA, che ha come ipotenusa il segmento AB. Il punto H ha la stessa ascissa di A e la stessa ordinata di B, cioè H(3; 1).
Procedendo come sopra, possiamo vedere che le misure dei suoi cateti sono:

$$\overline{HB} = x_B - x_A = 4\,u \qquad \overline{HA} = y_A - y_B = 3\,u$$

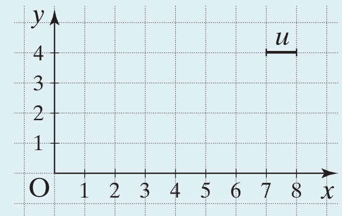
Applicando il teorema di Pitagora al triangolo HBA, possiamo determinare la misura di $\overline{AB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4\,u)^2 + (3\,u)^2} =$$

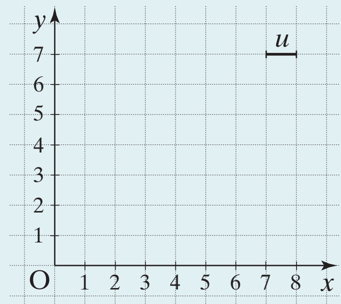
$$= \sqrt{16\,u^2 + 9\,u^2} = \sqrt{25\,u^2} = 5\,u^2$$

→ La distanza di due punti qualunque A e B si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo che ha come ipotenusa il segmento AB e come misure dei cateti la differenza tra le misure delle ascisse e la differenza tra le misure delle ordinate.

1 Nel riferimento cartesiano riportato a fianco rappresenta le coppie di punti:
A(1; 0) e B(7; 0) C(1; 3) e D(4; 3)
Determina poi la lunghezza del segmento AB e la lunghezza del segmento CD.



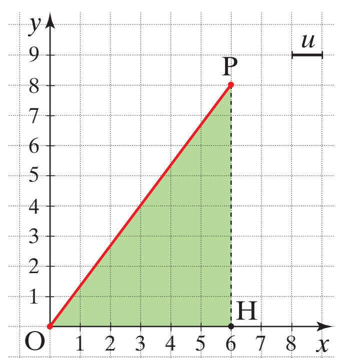
2 Nel riferimento cartesiano riportato a fianco rappresenta le coppie di punti:
E(1; 0) e F(1; 5) G(4; 2) e H(4; 7)
Determina poi la lunghezza del segmento EF e la lunghezza del segmento GH.



Esercizi guidati

3 ***In un riferimento cartesiano rappresenta il punto P(6; 8). Determina la sua distanza dall'origine.***

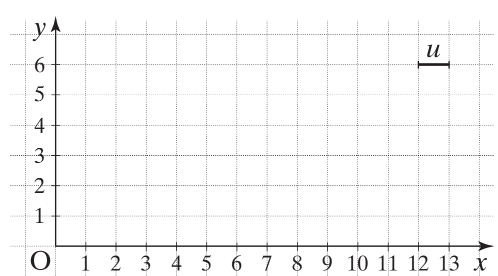
Disegna il punto nel riferimento cartesiano a fianco e traccia il segmento OP: questo segmento rappresenta la distanza di P da O.
Per determinare la lunghezza del segmento OP applica ora il teorema di Pitagora al triangolo OHP.



$\overline{OH} = x_P = \ldots\ldots\ u$ $\overline{HP} = y_P = \ldots\ldots\ u$

$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ u$

4 ***Nel riferimento cartesiano riportato a fianco rappresenta i punti R(13; 2) e S(1; 7). Determina poi la lunghezza del segmento RS. (Evidenzia il triangolo nel quale applicare il teorema di Pitagora.)***

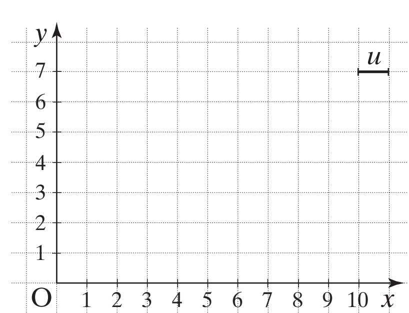


$\overline{HR} = x_R - x_S = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\overline{HS} = y_S - \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

$\overline{RS} = \sqrt{\overline{HR}^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ u$

5 ***Nel riferimento cartesiano riportato a fianco rappresenta i punti A(6,5; 1,5) e B(2; 7,5). Determina poi la lunghezza del segmento AB. (Evidenzia il triangolo nel quale applicare il teorema di Pitagora.)***



$\overline{HA} = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$ $\overline{HB} = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

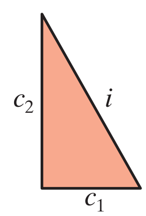
$\overline{AB} = \sqrt{\overline{HA}^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ u$

ESERCIZI → pag. 153

Riassumiamo quello che abbiamo studiato...

IL TEOREMA DI PITAGORA

Relazione tra i lati di un triangolo rettangolo



$i^2 = c_1^2 + c_2^2$

$i = \sqrt{\dots_1^2 + \dots_2^2}$

$c_1 = \sqrt{i^2 - \dots_2^2}$

$c_2 = \sqrt{\dots^2 - c_2^2}$

Utilizzo

Le terne pitagoriche

Tre numeri formano una terna pitagorica se il quadrato del maggiore è uguale alla somma dei .... degli altri due.

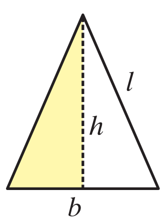
$c^2 = a^2 + b^2$

a, b, c formano una

....

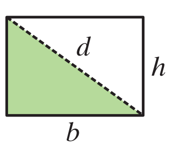
Applicazioni

TRIANGOLO ISOSCELE



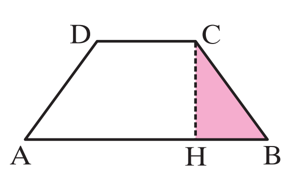
$l = \sqrt{\left(\frac{b^2}{2}\right) + h^2}$

RETTANGOLO



$d = \sqrt{b^2 + h^2}$

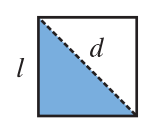
TRAPEZIO



$\overline{CB} = \sqrt{\overline{CH}^2 + \overline{HB}^2}$

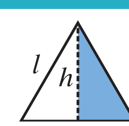
Casi particolari

QUADRATO



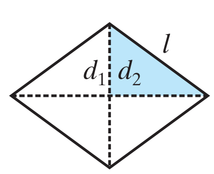
$d = \sqrt{l^2 + l^2} = \sqrt{2l^2} =$
$= \sqrt{2} \cdot l$

TRIANGOLO EQUILATERO



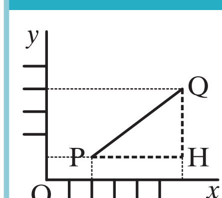
$h = \sqrt{l^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}\, l^2} =$
$= \frac{\sqrt{3} \cdot l}{2}$

ROMBO



$l = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$

RIFERIMENTO CARTESIANO



$\overline{PQ} = \sqrt{\dots^2 + \overline{QH}^2}$

721_04_ESER_2_138_162 25-01-2007 7:28 Pagina 138

Unità 2 Il teorema di Pitagora

Esercizi Lezione per lezione

Lezione 1 Che cos'è il teorema di Pitagora

Teoria → p. 20-23

in pillole

Il **teorema di Pitagora** esprime una relazione che lega i cateti e l'ipotenusa di un triangolo rettangolo.

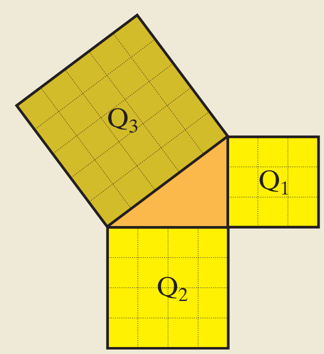
Tale relazione può essere espressa in due modi:

in un triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti

oppure:

in un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è uguale alla somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti.

Area Q_1 + Area Q_2 = Area Q_3



Laboratorio
GIOCHIAMO UN PO' CON IL TEOREMA DI PITAGORA

Disegna un triangolo isoscele con la base AB lunga 4 cm e i lati AC e BC lunghi 5 cm.
ABC è rettangolo? ....

Disegna e ritaglia un quadrato Q_3 con il lato lungo 4 cm. Incollalo in modo tale che un suo lato coincida con il lato AB del triangolo isoscele. Disegna e ritaglia due quadrati congruenti Q_1 e Q_2 aventi il lato lungo 5 cm. Incolla questi quadrati in modo che un loro lato coincida con uno dei lati del triangolo.
Calcola le aree dei quadrati considerati.
È valida la relazione Area Q_3 = Area Q_1 + Area Q_2? ....

Disegna ora due triangoli diversi dal precedente che non siano rettangoli. Ripeti le operazioni proposte sopra.
È valida la relazione Area Q_3 = Area Q_1 + Area Q_2? ....

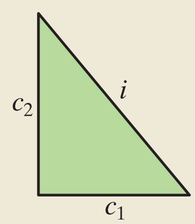
Quali parole inseriresti nella seguente frase perché essa rappresenti la giusta conclusione delle precedenti osservazioni?
Il teorema di Pitagora può essere applicato .... **ai triangoli rettangoli**.

LEZIONE 2 Le formule del teorema di Pitagora

Teoria → p. 24-25

in pillole

Il teorema di Pitagora può essere sfruttato per calcolare la misura di un lato di un triangolo rettangolo conoscendo la misura degli altri due.



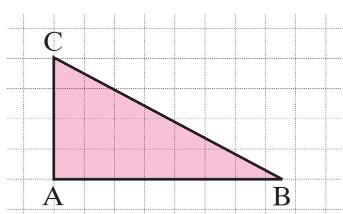
$i^2 = c_1^2 + c_2^2$ da cui $i = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$

$c_1^2 = i^2 - c_2^2$ da cui $c_1 = \sqrt{i^2 - c_2^2}$

$c_2^2 = i^2 - c_1^2$ da cui $c_2 = \sqrt{i^2 - c_1^2}$

Osserva la figura, i dati e risolvi.

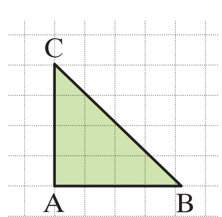
1



Dati
$\overline{AC} = 80$ mm
$\overline{AB} = 150$ mm

Domanda
$\overline{BC} = ?$

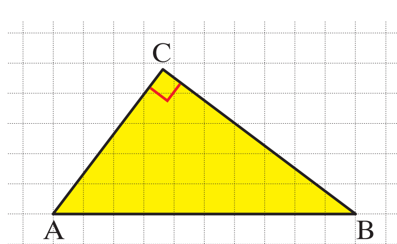
2



Dati
$\overline{BC} = 29$ cm
$\overline{AB} = 21$ cm

Domanda
$\overline{AC} = ?$

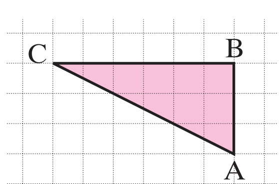
3



Dati
$\overline{AB} = 25$ cm
$\overline{AC} = 15$ cm

Domanda
$\overline{BC} = ?$

4



Dati
$\overline{CB} = 18$ cm
$\overline{AB} = 9$ cm

Domanda
$\overline{AC} = ?$

5 Completa la tabella. I triangoli considerati sono tutti rettangoli.

	Triangolo 1	Triangolo 2	Triangolo 3	Triangolo 4	Triangolo 5
c_1	10 cm		33 mm	17,5 cm	12 dm
c_2	24 cm	24 cm			15 dm
i		25 cm	55 mm	45,5 cm	

6 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 7,5 cm e 18 cm. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [67,5 cm²; 45 cm]

7 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 3,9 cm e 5,2 cm. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [10,14 cm²; 15,6 cm]

8 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 40 mm e 42 mm. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [840 mm²; 140 mm]

9 In un triangolo rettangolo un cateto misura 123 mm e l'altro cateto è congruente a $\frac{4}{3}$ del primo. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [10 086 mm²; 492 mm]

10 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 5,1 m e il cateto minore 2,4 dm. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [12 dm; 5,4 dm²]

11 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 45,5 cm e il cateto minore è congruente a $\frac{5}{13}$ dell'ipotenusa. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [367,5 cm²; 105 cm]

12 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e il cateto maggiore misurano rispettivamente 18,2 cm e 16,8 cm. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro. [58,8 cm²; 42 cm]

13 L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo sono lunghi rispettivamente 6,5 cm e 5,6 cm. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del triangolo. [15,4 cm; 9,24 cm²]

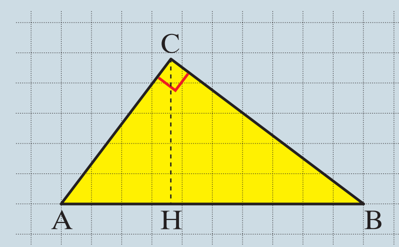
14 I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 3 cm e 8 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [≈ 19,5 cm]

15 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 15 cm e 18 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [≈ 56,4 cm]

16 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e un cateto misurano rispettivamente 32 cm e 21 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [≈ 77,1 cm]

Esercizio guidato

17 ***Osserva la figura, i dati e risolvi.***



Dati	Domanda
$\overline{AC} = 2{,}4$ cm	$\overline{CH} = ?$
$\overline{CB} = 3{,}2$ cm	

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2} = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

I cateti di un triangolo rettangolo possono essere considerati come base e altezza relativa; quindi, moltiplicandoli tra loro, ottieni la doppia area del triangolo. Ovviamente, anche l'ipotenusa AB e l'altezza CH possono essere considerati come base e altezza relativa; quindi, dividendo la doppia area per l'ipotenusa AB, puoi ottenere l'altezza CH.

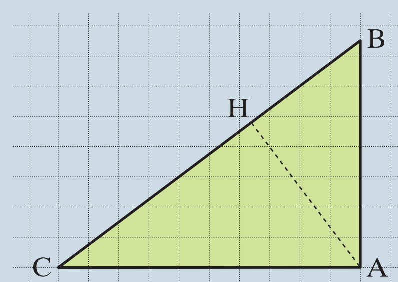
$2\ A = \overline{AC} \cdot \overline{CB} = \ldots\ldots \cdot \ldots\ldots = \ldots\ldots\ \text{cm}^2 \qquad \overline{CH} = \dfrac{2\ A}{\overline{AB}} = \dfrac{\ldots\ldots\ \text{cm}^2}{\ldots\ldots\ \text{cm}} = \ldots\ldots\ \text{cm}$

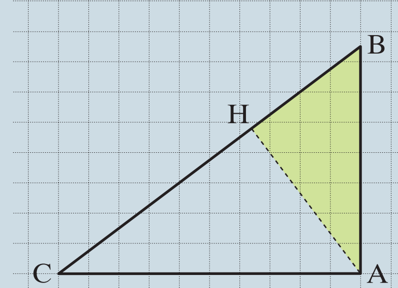
18 I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 14 cm e 48 cm. Determina la lunghezza del perimetro e quella dell'altezza relativa all'ipotenusa. [112 cm; 13,44 cm]

19 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 16,9 cm; un cateto è $\dfrac{5}{13}$ dell'ipotenusa. Determina la misura del perimetro del rettangolo e la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa. [39 cm; 6 cm]

Esercizio guidato

20 ***In un triangolo rettangolo i due cateti misurano 7,5 cm e 10 cm. Determina la misura dell'ipotenusa, la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa e la lunghezza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.***





Dati	Domanda	
$\overline{AB} = \ldots\ldots$ cm	$\ldots\ldots = ?$	$\overline{BH} = ?$
$\ldots\ldots = 10$ cm	$\overline{AH} = ?$	$\ldots\ldots = ?$

Applica il teorema di Pitagora al triangolo ABC.

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots^2 + \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

$$\overline{AH} = \frac{\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots}{\overline{CB}} = \frac{\ldots\ldots \cdot \ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Applica il teorema di Pitagora al triangolo AHB.

$$\overline{BH} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots^2 - \ldots\ldots^2} = \sqrt{\ldots\ldots - \ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots} = \ldots\ldots$$

$\overline{HC} = \ldots\ldots - \ldots\ldots = \ldots\ldots$

21 I cateti di un triangolo rettangolo sono lunghi 54 mm e 72 mm. Determina:
a la lunghezza dell'ipotenusa;
b la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
c la lunghezza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[90 mm; 43,2 mm; 32,4 mm; 57,6 mm]

22 In un triangolo rettangolo le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa misurano 10,8 cm e 19,2 cm; l'altezza relativa all'ipotenusa misura 14,4 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [72 cm]

23 L'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misurano 12,5 cm e 10 cm. Determina:
a la lunghezza del perimetro;
b la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
c la lunghezza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[30 cm; 6 cm; 4,5 cm; 8 cm]

24 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e un cateto misurano rispettivamente 22,5 cm e 13,5 cm. Determina:
a la lunghezza del perimetro;
b la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa;
c la lunghezza delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[54 cm; 10,8 cm; 8,1 cm; 14,4 cm]

25 Le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo misurano 28,8 cm e 51,2 cm; l'altezza relativa all'ipotenusa misura 38,4 cm. Determina la misura del perimetro del triangolo. [192 cm]

26 L'area di un triangolo rettangolo è 541,5 cm^2; la misura di un cateto misura 38 cm. Determina:
a la misura del perimetro del triangolo;
b la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa;
c la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[114 cm; 22,8 cm; 17,1 cm; 30,4 cm]

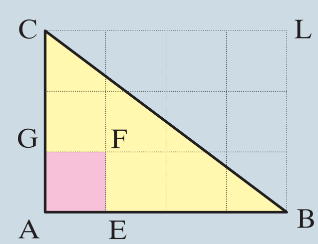
27 Il perimetro di un triangolo rettangolo misura 68 cm; i due cateti sono congruenti rispettivamente a $\frac{8}{17}$ e a $\frac{15}{17}$ dell'ipotenusa. Determina:
a la misura di ogni lato del triangolo;
b la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa;
c la misura delle proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.
[13,6 cm; 25,5 cm; 28,9 cm; 12 cm; 6,4 cm; 22,5 cm]

28 La somma dei cateti di un triangolo rettangolo è 49 cm. Sapendo che un cateto è $\frac{3}{4}$ dell'altro, determina l'area e la lunghezza del perimetro del triangolo. [294 cm^2; 84 cm]

29 La differenza tra l'ipotenusa e un cateto di un triangolo rettangolo misura 3 cm; il cateto è $\frac{24}{25}$ dell'ipotenusa. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [168 cm; 756 cm^2]

Esercizio guidato

30 *L'area di un triangolo rettangolo è 864 cm². Sapendo che un cateto è congruente ai $\frac{3}{4}$ dell'altro, determina la lunghezza del perimetro.*



$A_{ABLC} = 864\ \text{cm}^2 \cdot \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^2$

$A_{AEFG} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^2 : \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^2$

$\overline{AE} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{cm}$

.... [144 cm]

31 L'area di un triangolo rettangolo misura 750 mm^2. Sapendo che un cateto è congruente a $\frac{5}{12}$ dell'altro, determina la lunghezza del perimetro. [150 mm]

32 La somma dei cateti di un triangolo rettangolo è lunga 38 cm e la loro differenza è lunga 12 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [≈ 66,18 cm]

33 In un triangolo rettangolo un cateto è $\frac{8}{15}$ dell'altro. Determina la misura del perimetro del triangolo, sapendo che la sua area misura 540 cm^2. [120 cm]

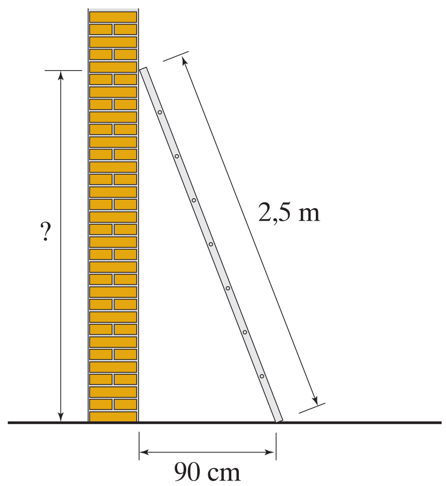
34 Calcola l'area e la lunghezza del perimetro di un triangolo rettangolo, sapendo che un cateto è congruente ai $\frac{5}{12}$ dell'altro e che la loro somma è 102 cm.
[1080 cm^2; 180 cm]

35 In un triangolo rettangolo la differenza tra i cateti misura 28 cm, un cateto è $\frac{15}{8}$ dell'altro. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo.
[160 cm; 960 cm^2]

36 Se a e b sono le misure dei cateti di un triangolo rettangolo e c è quella dell'ipotenusa, quali delle seguenti relazioni sono vere? Indicalo con una crocetta.

- ☐ $a^2 + b^2 = c^2$
- ☐ $c = a + b$
- ☐ $a^2 = b^2 + c^2$
- ☐ $b^2 = c^2 - a^2$
- ☐ $a = \sqrt{b^2 - c^2}$
- ☐ $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

37 Una scala a pioli lunga 2,5 m è appoggiata al muro. La sua base dista dal muro 90 cm. A quale altezza dal suolo è appoggiata l'altra estremità della scala?



[2,33 m]

LEZIONE 3 Le terne pitagoriche

Teoria → p. 26-27

in pillole

Tre numeri interi, tali che il quadrato del maggiore sia uguale alla somma dei quadrati degli altri due, formano una **terna pitagorica**.

Se la terna è costituita di numeri interi primi tra loro si dice **primitiva**, ad esempio:

3 4 5 5 12 13

Da una terna pitagorica se ne possono ottenere infinite altre, costituite di numeri interi o decimali, moltiplicando o dividendo ogni elemento della terna per uno stesso numero.

3 4 5 1,5 2 2,5

5 12 13 10 24 26

38 Completa la tabella.

a	b	c	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2	Terna pitagorica: sì o no?	Terna primitiva: sì o no?
20	99	101						
45	60	75						
16	30	34						
18	24	26						
24	143	145						
20	30	40						
16	63	65						

Laboratorio
GIOCHIAMO CON LE TERNE PITAGORICHE

Le terne pitagoriche affascinarono fin dall'antichità i matematici, che ne fecero spesso l'oggetto dei loro studi.
Lavoriamo insieme per trovare alcune particolarità di queste terne di numeri.
Prendi un numero naturale **dispari** e chiamalo d.

A partire da questo numero d puoi costruire una terna pitagorica calcolando le quantità $\frac{d^2-1}{2}$ e $\frac{d^2+1}{2}$.

Costruisci una tabella.

d	$\frac{d^2-1}{2}$	$\frac{d^2+1}{2}$	**Verifica**	**Terna primitiva: sì o no?**
3	$\frac{9-1}{2}=\frac{8}{2}=4$	$\frac{9+1}{2}=\frac{10}{2}=5$	$3^2+4^2=5^2$	sì
5	$\frac{25-1}{2}=\frac{24}{2}=12$			
7				
9				
11				

Puoi continuare, se vuoi, a trovare altre terne.

In generale, puoi affermare che se d è un numero dispari, la terna $d \quad \frac{d^2-1}{2} \quad \frac{d^2+1}{2}$ è costituita da numeri .... ed è una terna ....

Prendi ora un numero naturale **pari** e chiamalo p.

A partire da questo numero p puoi costruire una terna pitagorica calcolando le quantità $\frac{p^2-1}{2}$ e $\frac{p^2+1}{2}$.

Costruisci una tabella.

p	$\frac{p^2-1}{2}$	$\frac{p^2+1}{2}$	**Verifica**	**Terna primitiva: sì o no?**
2	$\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5$	$\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$	$1{,}5^2+2^2=2{,}5^2$	No, è derivata da (3; 4; 5)
4	$\frac{16-1}{2}=\frac{15}{2}=7{,}5$			
6				
8				
10				

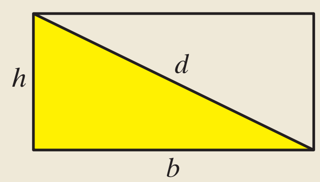
Puoi continuare, se vuoi, a trovare altre terne.

In generale, puoi affermare che se p è un numero pari, la terna $p \quad \frac{p^2-1}{2} \quad \frac{p^2+1}{2}$ è costituita da numeri .... ed è una terna ....

LEZIONE 4 Applicazioni del teorema di Pitagora

in pillole Teoria → p. 28-29

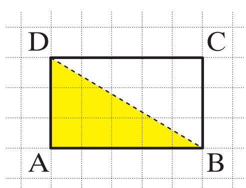
Il teorema di Pitagora può essere applicato ogni volta che, componendo una figura, si ottiene un triangolo rettangolo.



$d = \sqrt{b^2 + h^2}$ $b = \sqrt{d^2 - h^2}$ $h = \sqrt{d^2 - b^2}$

Osserva la figura, i dati e risolvi.

39



Dati

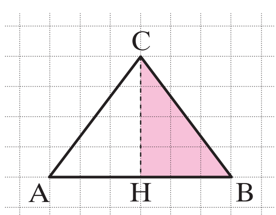
$\overline{AB} = 15$ cm

$\overline{AD} = 9$ cm

Domanda

$\overline{DB} = ?$

40



Dati

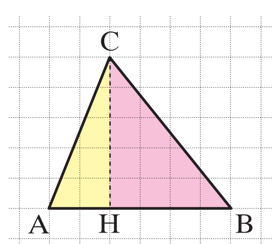
$\overline{AB} = 54$ mm

$\overline{CH} = 36$ mm

Domanda

$p_{ABC} = ?$

41



Dati

$\overline{AH} = 6$ cm

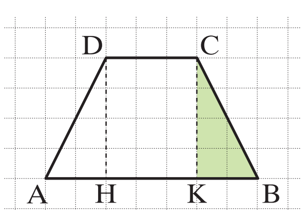
$\overline{HB} = 12$ cm

$\overline{CH} = 15$ cm

Domanda

$p_{ABC} = ?$

42



Dati

$\overline{AB} = 49$ cm

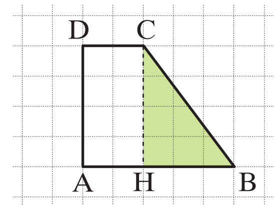
$\overline{DC} = 21$ cm

$\overline{CK} = 28$ cm

Domanda

$\overline{CB} = ?$

43



Dati

$\overline{AB} = 12,5$ cm

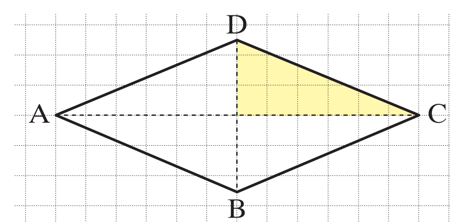
$\overline{DC} = 5$ cm

$\overline{CB} = 12,5$ cm

Domanda

$\overline{CH} = ?$

44



Dati

$\overline{DC} = 39$ cm

$\overline{DB} = 30$ cm

Domanda

$\overline{AC} = ?$

45 Misura in centimetri i lati della pagina del tuo quaderno; applicando il teorema di Pitagora trova la misura della diagonale approssimata ad una cifra dopo la virgola. Verifica con l'uso del righello il risultato ottenuto.

46 Misura in centimetri i lati della pagina del tuo libro di matematica; applicando il teorema di Pitagora trova la misura della diagonale approssimata ad una cifra dopo la virgola. Verifica con l'uso del righello il risultato ottenuto.

47 Misura in centimetri i lati del piano d'appoggio del tuo banco; applicando il teorema di Pitagora trova la misura della diagonale approssimata ad una cifra dopo la virgola. Verifica con l'uso della riga il risultato ottenuto.

48 L'area di un rettangolo è 5,4 cm^2 e la sua base è lunga 1,5 cm. Determina la lunghezza della sua diagonale. [3,9 cm]

49 L'area di un rettangolo è 270 cm^2 e la sua altezza misura 12 cm. Determina la misura della sua diagonale. [25,5 cm]

50 Il perimetro di un rettangolo è lungo 176 cm e la base è lunga 55 cm. Determina la lunghezza della sua diagonale. [≈ 64,1 cm]

51 La diagonale di un rettangolo misura 6,8 cm, l'altezza 3,2 cm. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del rettangolo. [18,4 cm; 19,2 cm^2]

52 La base di un rettangolo è lunga 60 mm e la diagonale 68 mm. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del rettangolo. [184 mm; 1920 mm^2]

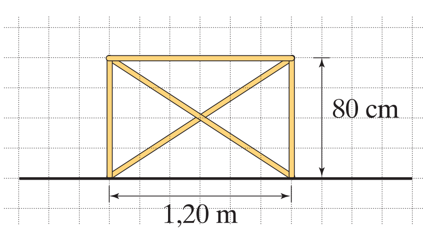
53 La diagonale di un rettangolo misura 45 cm, una dimensione 30 cm. Determina la misura del perimetro del rettangolo. [≈ 127 cm]

54 Il perimetro di un rettangolo misura 44,2 cm; l'altezza del rettangolo è congruente a $\frac{5}{12}$ della base. Determina la misura della sua diagonale. [16,9 cm]

55 L'area di un rettangolo è 432 cm^2. Sapendo che la sua base è congruente a $\frac{4}{3}$ dell'altezza, determina la lunghezza della diagonale. [30 cm]

56 Il perimetro di un rettangolo misura 154 cm, la differenza tra la base e l'altezza misura 7 cm. Determina l'area del rettangolo e la misura della sua diagonale. [1470 cm^2; ≈ 54,7 cm]

57 Per costruire una staccionata si piantano dei paletti, distanti 1,20 m uno dall'altro, in modo che sporgano di 80 cm dal terreno; si collegano le estremità con un'asse orizzontale. Per irrigidire la struttura si dispongono due traverse lungo le diagonali. Quanto deve essere lunga ogni traversa? [≈ 1,44 m]



58 Il perimetro di un quadrato è lungo 104 cm. Determina la lunghezza della diagonale. [≈ 36,77 cm]

59 L'area di un quadrato è 841 dm^2. Determina la lunghezza della diagonale. [≈ 41 dm]

60 Il perimetro di un quadrato misura 60 cm. Determina la misura della sua diagonale. [≈ 21,2 cm]

61 L'area di un quadrato è 1225 cm^2. Determina la misura della sua diagonale. [≈ 49,5 cm]

62 Un rettangolo ha il perimetro lungo 100 cm e una dimensione lunga 18 cm. Determina la lunghezza della diagonale del quadrato equivalente al rettangolo. [≈ 33,9 cm]

63 In un triangolo isoscele il perimetro è lungo 72 dm e la base è lunga 20 dm. Determina l'area del triangolo. [240 dm^2]

64 In un triangolo isoscele ogni lato obliquo misura 39 cm, il perimetro misura 108 cm. Determina l'area del triangolo. [540 cm^2]

65 In un triangolo isoscele il perimetro misura 30 cm, la base misura 9,6 cm. Determina l'area del triangolo. [43,2 cm^2]

66 In un triangolo isoscele l'area è 27 cm^2 e la base è lunga 9 cm. Determina la lunghezza del perimetro. [24 cm]

67 L'area di un triangolo isoscele è 29,4 cm^2, la sua altezza misura 8,4 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo. [25,2 cm]

68 L'area di ABCE è 1936 cm^2. Determina l'area di ABCDE e la misura del suo perimetro.

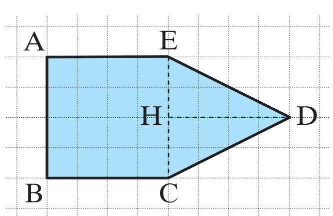
Dati

$\overline{CE} \cong \overline{HD}$

Domanda

$A_{ABCDE} = ?$

$p_{ABCDE} = ?$



[2904 cm^2, ≈ 230,4 cm]

69 Osserva la figura, i dati e risolvi.

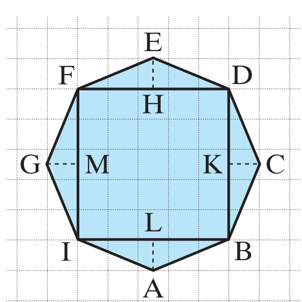
Dati

$p_{ABCDEFGI} = 32{,}32$ cm

$\overline{AL} = 1{,}5$ cm

Domanda

$A_{ABCDEFGI} = ?$



[78,75 cm^2]

70 Su ogni lato di un quadrato ABCD è stato costruito un triangolo isoscele, avente la base coincidente con il lato del quadrato e l'altezza di 0,9 cm. L'area del quadrato è 64 cm^2. Determina la misura del perimetro del poligono ottenuto dopo le costruzioni. [32,8 cm]

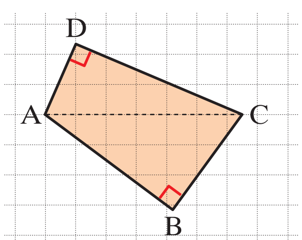
71 Un rettangolo ABCD ha la dimensione AB lunga 24 cm e la dimensione BC lunga 20 cm. Indica con M il punto medio di AD. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo BCM. [72 cm]

72 Il perimetro di un triangolo isoscele è 72 cm e la sua base è congruente a $\frac{6}{5}$ del lato.
Determina l'area del triangolo. [243 cm^2]

73 Calcola la misura del perimetro di un triangolo scaleno ABC, sapendo che il lato AC è lungo 15 cm, il lato BC è lungo 20 cm e l'altezza relativa al lato AB misura 12 cm. ABC è un triangolo rettangolo oppure no? Perché? [p = 60 cm]

74 In un triangolo scaleno ABC l'altezza CH è lunga 7,2 cm e divide il lato AB in due parti lunghe rispettivamente 5,4 cm e 9,6 cm. Determina la lunghezza del perimetro di ABC. [36 cm]

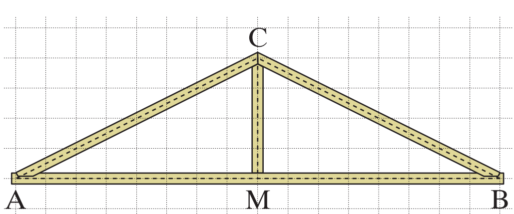
75 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati	Domanda
$\overline{AC} = 65$ cm	$A_{ABCD} = ?$
$\overline{BC} = 39$ cm	$p_{ABCD} = ?$
$\overline{AD} = 25$ cm	

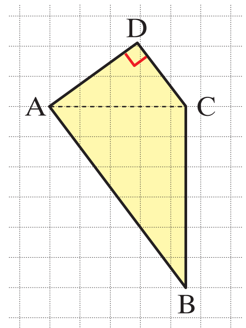
[1764 cm^2; 176 cm]

76 Questo disegno rappresenta lo schema di una capriata, struttura in legno per sostenere un tetto, simmetrica rispetto a CM. Sapendo che $\overline{AB} = 8$ m e $\overline{CM} = \frac{1}{2}\ \overline{MB}$, determina la lunghezza di CB.



[≈ 4,5 m]

77 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati	Domanda
$\overline{AB} = 75$ mm	$A_{ABCD} = ?$
$\overline{AC} = 45$ mm	$p_{ABCD} = ?$
$\overline{AD} = 36$ mm	

[1836 mm^2; 198 mm]

78 Un quadrilatero è formato da due triangoli isosceli aventi la base in comune, lunga 24 cm. I lati obliqui dei triangoli isosceli misurano rispettivamente 20 cm e 13 cm. Determina l'area del quadrilatero. [252 cm^2]

79 Un trapezio rettangolo ha le basi lunghe 36 cm e 20 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio, sapendo che l'altezza misura 30 cm. [120 cm]

80 Un trapezio rettangolo ha il lato obliquo, l'altezza e la base minore lunghe rispettivamente 11,5 cm, 9,2 cm e 7 cm. Determina la misura del perimetro del trapezio. [41,6 cm]

81 Un trapezio rettangolo ha le basi e il lato obliquo lunghi rispettivamente 25 cm, 37,5 cm e 32,5 cm. Determina la misura del perimetro e l'area del trapezio. [125 cm; 937,5 cm^2]

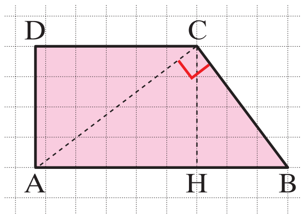
82 Un trapezio isoscele ha le basi che misurano rispettivamente 8 cm e 15 cm. Determina la lunghezza del perimetro, sapendo che l'altezza è lunga 12 cm. [48 cm]

83 In un trapezio isoscele un lato obliquo e la sua proiezione sulla base maggiore misurano rispettivamente 59,5 cm e 28 cm. Determina l'area del trapezio, sapendo che la base minore misura 30 cm. [3045 cm^2]

84 Un trapezio isoscele ha le basi che misurano rispettivamente 72 mm e 30 mm. Calcola l'area del trapezio, sapendo che il perimetro è lungo 160 mm. [1020 mm^2]

85 Un trapezio isoscele ha il perimetro lungo 240 cm e le basi che misurano rispettivamente 75 cm e 40 cm. Determina l'area del trapezio. [3450 cm^2]

86 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati	Domanda
$\overline{AB} = 25$ cm	$A_{ABCD} = ?$
$\overline{CB} = 15$ cm	$p_{ABCD} = ?$

[246 cm^2; 68 cm]

87 In un trapezio rettangolo la base maggiore è lunga 9 cm, la base minore è lunga 2,6 cm e la diagonale maggiore misura 15 cm. Calcola l'area e la misura del perimetro del trapezio. [69,6 cm^2; 37,2 cm]

88 In un trapezio rettangolo la base maggiore misura 57,8 cm; il lato obliquo misura 51 cm ed è perpendicolare alla diagonale minore. Determina:

a la misura dell'altezza del trapezio;
b la misura del perimetro;
c l'area.

[24 cm; 145,6 cm; 847,2 cm^2]

89 In un trapezio rettangolo la diagonale minore, lunga 31,2 cm, è perpendicolare al lato obliquo, lungo 13 cm. Determina:

a la misura dell'altezza del trapezio;
b l'area. [12 cm; 375,6 cm^2]

90 Un trapezio rettangolo ha l'area di 1242 cm^2, il lato obliquo e l'altezza che misurano rispettivamente 39 cm e 36 cm. Calcola la lunghezza delle due basi. [27 cm; 42 cm]

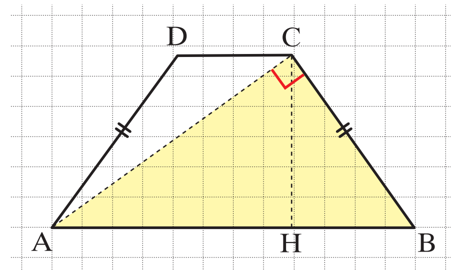
91 Calcola la misura del perimetro di un trapezio rettangolo avente l'area di 38,88 m^2, l'altezza che misura 5,4 cm e una base tripla dell'altra. [28,8 cm]

92 Un trapezio isoscele ha l'area di 630 cm^2, l'altezza e il lato obliquo che misurano rispettivamente 18 cm e 22,5 cm. Determina la misura delle basi e quella della diagonale. [21,5 cm; 48,5 cm; ≈ 39,4 cm]

93 In un trapezio rettangolo il lato obliquo è lungo 34 cm, l'altezza misura 30 cm e la diagonale minore è congruente a $\frac{5}{3}$ dell'altezza. Determina l'area e la lunghezza del perimetro del trapezio. [1440 cm^2; 160 cm]

Osserva la figura, i dati e risolvi.

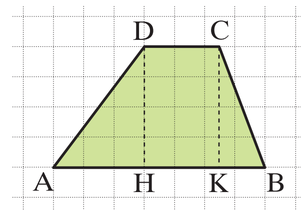
94



Dati	Domanda
$\overline{AC} = 24$ cm	$p_{ABCD} = ?$
$\overline{BC} = 18$ cm	

[74,4 cm]

95



Dati	Domanda
$\overline{CK} = 4{,}8$ cm	$A_{ABCD} = ?$
$\overline{CB} = 5{,}2$ cm	$p_{ABCD} = ?$
$\overline{AD} = 6$ cm	
$\overline{DC} = 3$ cm	

[27,84 cm^2; 22,8 cm]

96 Il lato di un rombo è lungo 5,3 cm e una sua diagonale misura 9 cm. Determina l'area del rombo. [25,2 cm^2]

97 Un rombo ha le diagonali che misurano rispettivamente 2,8 dm e 9,6 dm. Determina la lunghezza del suo perimetro. [20 dm]

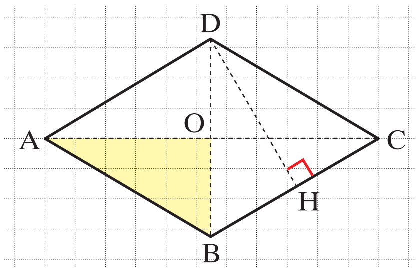
98 Il perimetro di un rombo misura 84 cm; una sua diagonale è lunga 25,2 cm. Determina l'area del rombo. [423,36 cm^2]

99 L'area di un rombo è 240 cm^2 e una sua diagonale è lunga 30 cm. Determina la lunghezza del perimetro. [68 cm]

100 La somma delle diagonali di un rombo è 124 cm e la diagonale minore è congruente a $\frac{7}{24}$ della diagonale maggiore. Determina la lunghezza del perimetro del rombo. [200 cm]

101 L'area di un rombo è 726 cm^2; una sua diagonale misura 44 cm. Determina la lunghezza del suo perimetro. [110 cm]

102 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati

$A_{ABCD} = 3696$ cm^2

$\overline{DB} = 66$ cm

Domanda

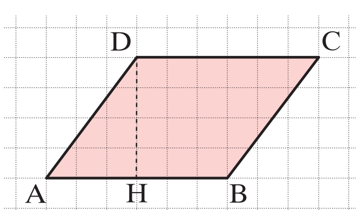
$\overline{BC} = ?$

$\overline{DH} = ?$

[65 cm; ≈ 56,9 cm]

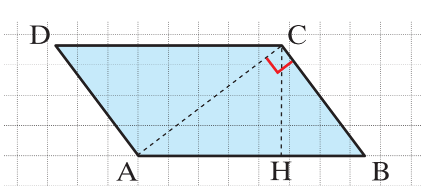
103 Un rombo ha il perimetro lungo 130 cm e una diagonale che misura 60 cm.
Determina:
a l'area del rombo;
b la misura dell'altezza relativa al lato.
[750 cm^2; ≈ 23,1 cm]

104 Nel parallelogramma ABCD il lato AB e il lato AD misurano rispettivamente 14,4 cm e 12 cm. La proiezione del lato AD sul lato AB misura 7,2 cm. Determina l'area del parallelogramma.



[138,24 cm^2]

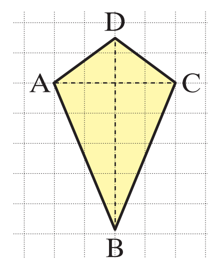
105 Nel parallelogramma ABCD la diagonale minore AC misura 30 cm ed è perpendicolare al lato BC, lungo 22,5 cm.



Determina:
a la misura di AB;
b la misura dell'altezza del parallelogramma relativa ad AB;
c l'area del parallelogramma.
[37,5 cm; 18 cm; 675 cm^2]

106 In un parallelogramma la diagonale minore è lunga 70 cm ed è perpendicolare al lato minore, lungo 52,5 cm. Calcola la lunghezza del perimetro del parallelogramma. [280 cm]

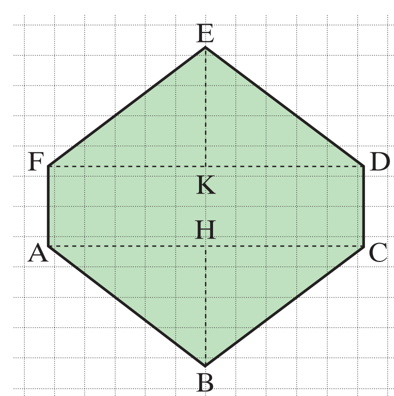
107 Nel deltoide ABCD i lati congruenti AB e BC misurano 5,2 cm e i lati congruenti AD e DC misurano 2,5 cm. Determina l'area del deltoide, sapendo che la diagonale AC misura 4 cm.



[12,6 cm^2]

108 In un deltoide PQRS la diagonale PR, che è anche asse di simmetria, è divisa dalla diagonale QS, lunga 3,2 cm, in due parti che misurano rispettivamente 1,2 cm e 3 cm. Determina la lunghezza del perimetro del deltoide. [10,8 cm]

109 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{DE} = \overline{EF} = 32{,}5$ cm

$\overline{DC} = 13$ cm

$\overline{DC} = \frac{1}{4}\ \overline{FD}$

Domanda

$A_{ABCDEF} = ?$

$p_{ABCDEF} = ?$

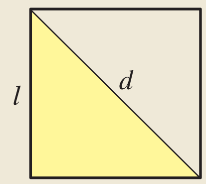
[1690 cm^2; 156 cm]

LEZIONE 5 Alcuni casi particolari

in pillole Teoria → p. 30-31

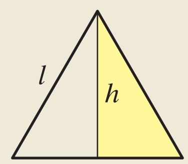
Formule che legano il lato e la diagonale del **quadrato**:

$d = l \cdot \sqrt{2}$ $\qquad l = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$



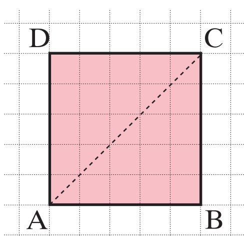
Formule che legano il lato e la diagonale del **triangolo equilatero**:

$l = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ $\qquad l = \dfrac{2\,h}{\sqrt{3}}$



Osserva le figure, i dati e risolvi.

110



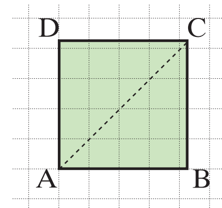
Dati

$\overline{AB}$ = 45 cm

Domanda

$\overline{AC}$ = ?

111



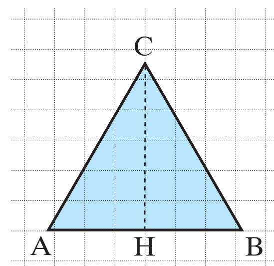
Dati

$\overline{AC}$ = 30 cm

Domanda

$\overline{AB}$ = ?

112



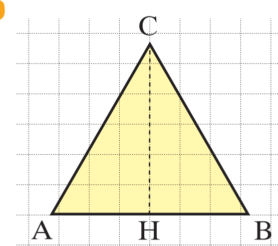
Dati

$\overline{CB} = \overline{AB} = \overline{AC}$ = 32 cm

Domanda

$\overline{CH}$ = ?

113



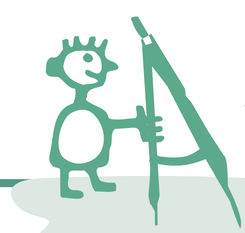
Dati

$\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$

$\overline{CH}$ = 28 cm

Domanda

$\overline{AB}$ = ?



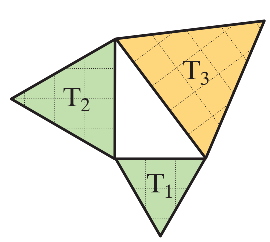
Laboratorio
LE RELAZIONI DI PITAGORA CON I TRIANGOLI EQUILATERI

Disegna su un cartoncino un triangolo rettangolo con i lati che misurano rispettivamente 6 cm, 8 cm, 10 cm.
Disegna ora tre triangoli equilateri: uno con il lato lungo 6 cm (indicalo con T_1), uno con il lato lungo 8 cm (indicalo con T_2), uno con il lato lungo 10 cm (indicalo con T_3).
Ritagliali e incollali in modo che un lato di ogni triangolo coincida con il lato di uguale misura del triangolo rettangolo.

Area T_1 = ...

Area T_2 = ...

Area T_3 = ...



Area T_3 = Area T_1 ...... Area T_2

Ripeti ora tutte le operazioni precedenti applicandole ad altri triangoli rettangoli a tua scelta.
Puoi generalizzare i risultati dicendo che:

in un triangolo rettangolo la somma delle aree dei triangoli equilateri costruiti sui cateti ....

....

114 Un quadrato ha il perimetro lungo 128 cm. Determina la lunghezza della diagonale.
[≈ 45,3 cm]

115 Un quadrato ha il perimetro lungo 140 cm. Determina la lunghezza della diagonale.
[≈ 49,5 cm]

116 L'area di un quadrato è 729 cm^2. Determina la lunghezza della diagonale. [≈ 38,2 cm]

117 La diagonale di un quadrato è lunga 36 cm. Determina l'area e la lunghezza del perimetro.
[648 cm^2; ≈ 101,8 cm]

118 Determina il perimetro di uno dei 4 triangoli in cui resta diviso un quadrato dalle sue diagonali, sapendo che l'area del quadrato è 900 mm^2.
[≈ 72,4 mm]

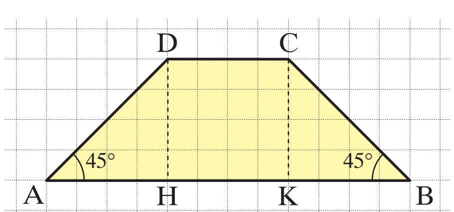
119 Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 20 cm e un angolo di 45°. Determina l'area e la lunghezza del perimetro del triangolo.
[200 cm^2; ≈ 68,3 cm]

120 L'area di un quadrato è 256 cm^2. Determina la misura del perimetro di uno dei triangoli in cui il quadrato è diviso dalle diagonali. [38,6 cm]

121 L'area di uno dei triangoli in cui le diagonali dividono un quadrato è 156,25 cm^2. Determina:
a l'area del quadrato;
b la lunghezza della diagonale del quadrato;
c la lunghezza del perimetro del triangolo considerato.
[625 cm^2; 35,4 cm; 60,4 cm]

Osserva la figura, i dati e risolvi.

122



Dati

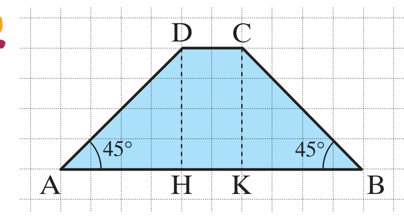
$\overline{DC} = 24$ mm

Domanda

$A_{ABCD} = ?$
$p_{ABCD} = ?$

[1152 mm^2; ≈ 163,9 mm]

123



Dati

$\overline{DH} = 44$ cm

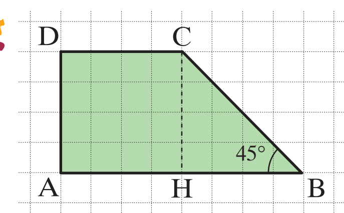
$\overline{DC} = \frac{1}{2}\,\overline{DH}$

Domanda

$A_{ABCD} = ?$
$p_{ABCD} = ?$

[2904 cm^2; ≈ 256,5 cm]

124



Dati

$\overline{CB} = 30$ cm

$\overline{AD} = \overline{DC}$

Domanda

$A_{ABCD} = ?$
$p_{ABCD} = ?$

[675 cm^2; ≈ 114,9 cm]

125 Il perimetro di un triangolo equilatero misura 39 cm. Determina la sua area. [≈ 73,2 cm^2]

126 Il lato di un triangolo equilatero misura 22 cm. Determina la sua area. [≈ 209,6 cm^2]

127 L'altezza di un triangolo equilatero è lunga 15,58 cm. Determina la misura del perimetro del triangolo. [≈ 54 cm]

128 Il perimetro di un triangolo equilatero misura 48 cm. Determina la sua area. [≈ 110,9 cm^2]

129 L'altezza di un triangolo equilatero è lunga 20,76 cm. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [≈ 71,9 cm; ≈ 248,8 cm^2]

Esercizio risolto

130 *Osserva la figura, i dati e risolvi.*

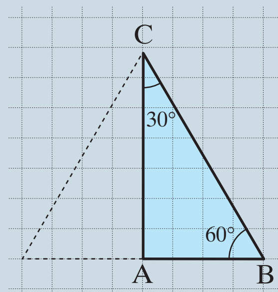
Dati

$\overline{AB} = 20$ cm

Domanda

$A_{ABC} = ?$

$p_{ABC} = ?$



Il triangolo ABC può essere considerato come la metà di un triangolo equilatero, avente come lato il doppio di AB.

$\overline{CB} = 20 \text{ cm} \cdot 2 = 40 \text{ cm}$

$\overline{CA} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40 \text{ cm} \approx 34{,}6 \text{ cm}$

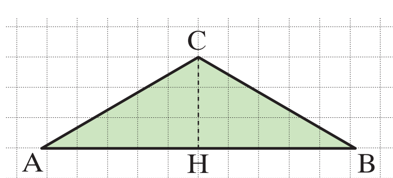
$p_{ABC} = 40 \text{ cm} + 20 \text{ cm} + 34{,}6 \text{ cm} \approx 94{,}6 \text{ cm}$

$A_{ABC} = \dfrac{20 \text{ cm} \cdot 34{,}6 \text{ cm}}{2} \approx 346 \text{ cm}^2$

131 Un triangolo rettangolo ha il cateto minore lungo 28 cm e l'angolo ad esso opposto di 30°. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [≈ 132,5 cm; ≈ 679 cm²]

132 Un triangolo rettangolo ha l'ipotenusa lunga 50 mm e un angolo di 60°. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [≈ 118,3 mm; ≈ 541 mm²]

133 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati

$\overline{AC} = \overline{CB} = 10$ cm

$A\hat{C}B = 120°$

Domanda

$A_{ABC} = ?$

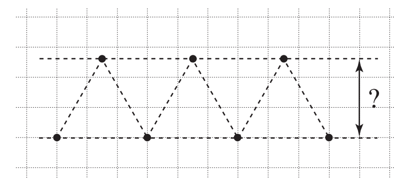
$p_{ABC} = ?$

[≈ 43,3 cm²; 37,3 cm]

134 Un triangolo isoscele ha un angolo di 120° e l'altezza uscente dal vertice di questo angolo lunga 20 cm. Determina la misura del perimetro e l'area del triangolo. [≈ 149,2 cm; ≈ 692,8 cm²]

135 Un triangolo rettangolo ha gli angoli acuti di 45° e un cateto lungo 20 mm. Determina la lunghezza del suo perimetro. [≈ 68,3 mm]

136 Si vuole realizzare una siepe di biancospino. Perché si sviluppi con vigore, le piantine



devono essere disposte come in figura, cioè ai vertici di triangoli equilateri affiancati.
In questa particolare siepe le piantine sono disposte a 30 cm una dall'altra. Qual è la distanza tra due file di piantine? [≈ 26 cm]

137 Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di ampiezza 45° e le basi lunghe rispettivamente 56 cm e 24 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio. [≈ 157,3 cm]

138 Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di ampiezza 45°, l'altezza lunga 25 cm e la base minore lunga 28 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio. [≈ 141,4 cm]

139 Un trapezio isoscele ha gli angoli acuti di ampiezza 45°, l'altezza e la base minore che misurano rispettivamente 36 cm e 24 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio. [≈ 221,8 cm]

140 Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di ampiezza 30°, l'altezza lunga 22 cm e la base minore lunga 15 cm. Determina la misura del perimetro del trapezio. [≈ 134,1 cm]

141 Disegna il quadrato di un "tangram" avente il lato di 10 cm. Determina la misura del perimetro di ogni figura che lo compone.

142 Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di 60°, il lato obliquo lungo 30 cm e la base minore congruente al lato obliquo. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del trapezio. [≈ 131 cm; ≈ 975 cm²]

143 Un trapezio isoscele ha gli angoli acuti di 30°, l'altezza e la base minore lunghe 15 cm e 20 cm rispettivamente. Determina la misura del perimetro. [≈ 152 cm]

144 Un trapezio rettangolo ha l'angolo acuto di ampiezza 60°, la proiezione del lato obliquo sulla base maggiore che misura 20 cm e la base maggiore lunga 50 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio. [≈ 154,6 cm]

145 Un trapezio isoscele ha gli angoli acuti di 60°, un lato obliquo e la base minore che misurano rispettivamente 40 cm e 30 cm. Determina l'area del trapezio. [≈ 1732 cm^2]

146 Un rombo ha gli angoli acuti di 60° e la diagonale minore lunga 24 cm. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del rombo. [96 cm; ≈ 498,8 cm^2]

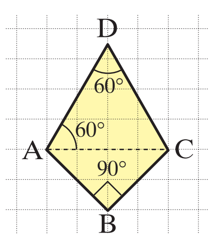
147 Un rombo ha gli angoli acuti di 60° e la diagonale maggiore lunga 20,78 cm. Determina la misura del perimetro e l'area del rombo. [≈ 48 cm; ≈ 124,7 cm^2]

148 Un rombo ha il perimetro che misura 120 cm e gli angoli ottusi di 120°. Determina la sua area. [≈ 779 cm^2]

149 Un rombo con gli angoli acuti di 60° ha la diagonale maggiore lunga 18 cm. Determina la lunghezza del suo perimetro e la sua area. [≈ 41,6 cm; ≈ 93,5 cm^2]

Osserva la figura, i dati e risolvi.

150



Dati

$\overline{AC} = 20$ cm

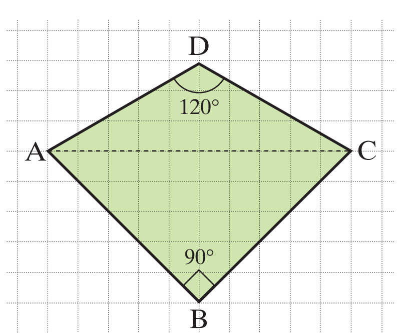
Domanda

$A_{ABCD} = ?$

$p_{ABCD} = ?$

[≈ 273,2 cm^2; ≈ 68,3 cm]

151



Dati

$\overline{AC} = 50$ cm

$AD \cong DC$

$AB \cong BC$

Domanda

$A_{ABCD} = ?$

[≈ 985,8 cm^2]

152 Un trapezio scaleno ha la base minore congruente all'altezza, che è lunga 18 cm, un angolo acuto di 45° e l'altro di 30°. Determina la lunghezza del suo perimetro e la sua area. [≈ 146,6 cm; ≈ 766,2 cm^2]

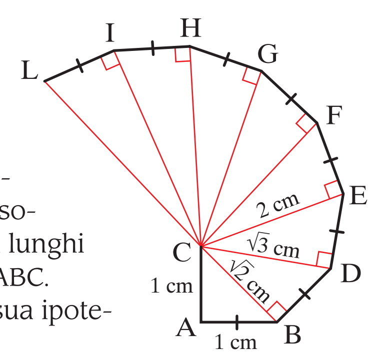
153 Le squadre che usi per il disegno geometrico sono di due tipi:

- quelle "a 30° e 60°" (hanno infatti gli angoli acuti di 30° e 60°);
- quelle "a 45°" (hanno entrambi gli angoli acuti di 45°).

Prendi una squadra del tipo "a 30° e 60°". Con l'aiuto di un altro righello misurane i cateti e l'ipotenusa *i*. Verifica con il calcolo che la lunghezza del cateto maggiore è l'approssimazione di $\frac{\sqrt{3}}{2}\,i$.

Prendi ora la squadra del tipo "a 45°". Come prima, verifica con il calcolo che la lunghezza dell'ipotenusa è l'approssimazione del prodotto $\sqrt{2}\,c$, dove *c* indica la misura di un cateto.

154 Segui le istruzioni riportate sotto e osserva la figura.



- Disegna un triangolo rettangolo isoscele con i cateti lunghi 1 cm; chiamalo ABC. La misura della sua ipotenusa è:

$$\overline{BC} = \sqrt{1\ \text{cm}^2 + 1\ \text{cm}^2} = \sqrt{2\ \text{cm}^2} = \sqrt{2}\ \text{cm}$$

- Costruisci il triangolo rettangolo BCD che ha il lato BC come cateto e l'altro cateto di lunghezza 1 cm. La misura della sua ipotenusa è:

$$\overline{CD} = \sqrt{2\ \text{cm}^2 + 1\ \text{cm}^2} = \sqrt{3\ \text{cm}^2} = \sqrt{3}\ \text{cm}$$

- Costruisci il triangolo rettangolo DCE che ha il lato DC come cateto e l'altro cateto di lunghezza 1 cm. La misura della sua ipotenusa è:

$$\overline{CE} = \sqrt{3\ \text{cm}^2 + 1\ \text{cm}^2} = \sqrt{4\ \text{cm}^2} = 2\ \text{cm}$$

- Continua ora da solo a determinare le lunghezze dei segmenti CF, CG, CH seguendo un procedimento analogo a quelli di prima.
- Con il righello riporta le misure approssimate:

$\sqrt{2}$ cm ≈ .... $\sqrt{3}$ cm ≈ ....

$\sqrt{5}$ cm ≈ .... $\sqrt{6}$ cm ≈ ....

155 Prova a disegnare un triangolo rettangolo che abbia l'ipotenusa lunga $\sqrt{13}$ cm. (Le lunghezze dei suoi cateti dovranno essere tali che la somma dei loro quadrati sia uguale a ....)

156 Prova a disegnare un triangolo rettangolo che abbia l'ipotenusa lunga $\sqrt{34}$ cm.

157 Considera alcuni triangoli rettangoli che hanno un cateto doppio dell'altro. Completa la tabella.

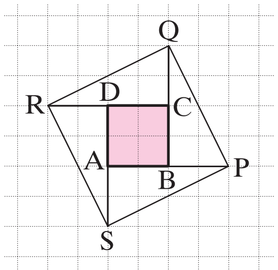
	c_1 (cm)	$c_2 = 2c_1$ (cm)	c_1^2 (cm²)	c_2^2 (cm²)	i^2 (cm²)	i (cm)
T_1	1	2	1	4	5	$\sqrt{5}$
T_2	2	4	4	$16 = 4 \cdot 4$	$20 = 5 \cdot 4$	$\sqrt{20} = \sqrt{5} \cdot 2$
T_3	3	6				$\sqrt{.....} = \sqrt{.....} \cdot .....$
T_4	4					

Per ogni triangolo si può osservare che

$c_2 = 2\,c_1 \qquad c_2^2 = ...\,c_1^2 \qquad i^2 = c_1^2 + c_2^2 = c_1^2 + ...\,c_1^2 = ...\,c_1^2 \qquad i = \sqrt{......\,c_1^2} = \sqrt{......} \cdot \sqrt{c_1^2} = \sqrt{......}\,c_1$

Possiamo affermare che, in un triangolo rettangolo avente un cateto .... dell'altro, la misura dell'ipotenusa può essere ottenuta moltiplicando per .... la misura del ....

158 Costruisci il quadrato ABCD avente il lato lungo 2 cm.
Prolunga il lato AB dalla parte di B, il lato BC dalla parte di C, il lato CD dalla parte di D, il lato DA dalla parte di A, di un segmento lungo quanto il lato del quadrato. Congiungi a due a due gli estremi liberi dei segmenti disegnati (come in figura): ottieni il quadrato PQRS.



- I triangoli SAP, PBQ, QCR, RDS sono tra loro ....
- Il triangolo SAP e il quadrato ABCD sono tra loro ....
- L'area del quadrato ABCD è ....
- L'area del triangolo SAP è ....
- L'area del quadrato PQRS è allora ...., cioè il .... di quella di ABCD.
- Il lato PQ è allora ....

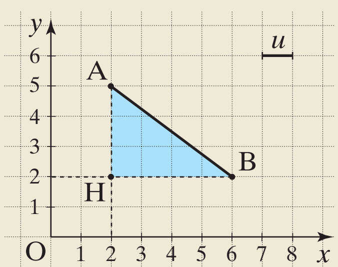
LEZIONE 6 Il teorema di Pitagora nel piano cartesiano

Teoria → p. 32-33

in pillole

La distanza di due punti allineati su una semiretta parallela all'asse delle ascisse è uguale alla differenza delle ascisse.

$\overline{HB} = x_B - x_H = 6\,u - 2\,u = 4\,u$



La distanza di due punti allineati su una semiretta parallela all'asse delle ordinate è uguale alla differenza delle ordinate.

$\overline{HA} = y_A - y_H = 5\,u - 2\,u = 3\,u$

La distanza di due punti qualunque A e B si ottiene applicando il teorema di Pitagora al triangolo che ha come ipotenusa il segmento AB e come misure dei cateti la differenza tra le misure delle ascisse e la differenza tra le misure delle ordinate.

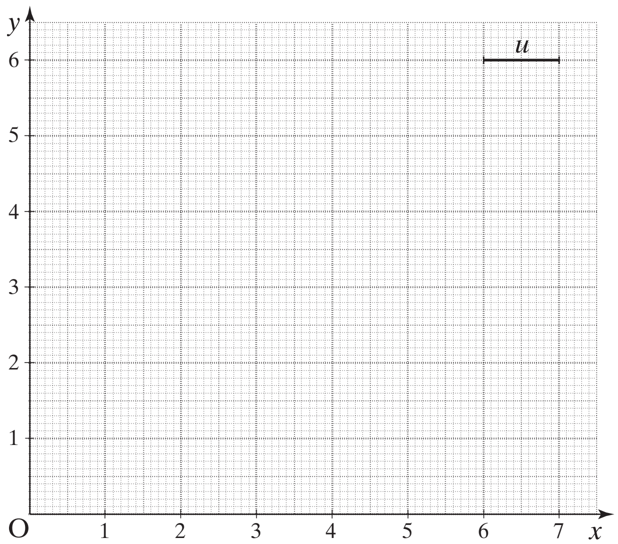
$\overline{AB} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{HA}^2} = \sqrt{(4\,u)^2 + (3\,u)^2} = \sqrt{16\,u^2 + 9\,u^2}$

Determina le distanze delle coppie di punti, dopo averli rappresentati nel riferimento cartesiano.

159 A(2; 0) e B(6,5; 0) $\overline{AB}$ = ...

C(0; 2) e D(4; 2) $\overline{CD}$ = ...

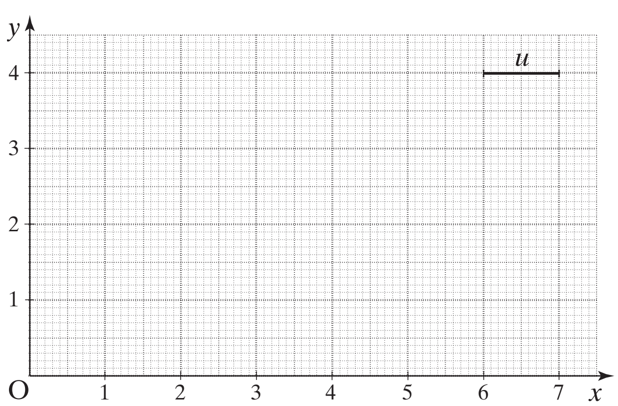
E(5; 5) e F(1; 5) $\overline{EF}$ = ...



160 P(2; 0) e Q(2; 4) $\overline{PQ}$ = ...

R(0; 3) e S(0; 1) $\overline{RS}$ = ...

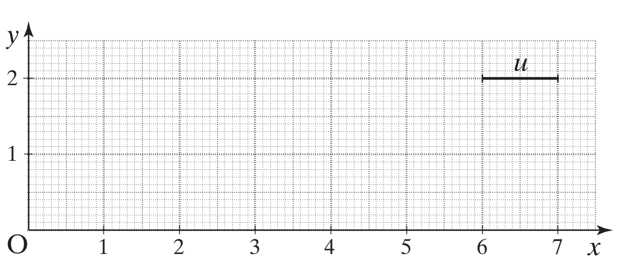
T(4; 1,5) e U(4; 3) $\overline{TU}$ = ...



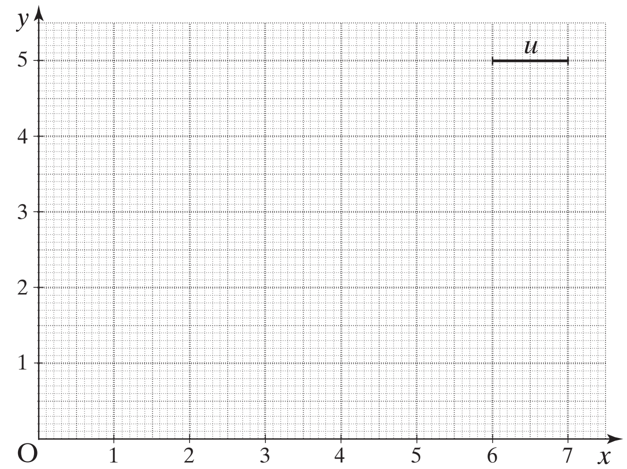
161 A(4,5; 1) e B(5,5; 1) $\overline{AB}$ = ...

C(2,5; 2) e D(2,5; 0) $\overline{CD}$ = ...

E(7; 2) e F(2; 2) $\overline{EF}$ = ...



162 Nel riferimento cartesiano sotto riportato rappresenta i punti A(1,5; 0), B(6,5; 0), C(6,5; 5), D(1,5; 5). Unisci nell'ordine i punti. Determina la misura del perimetro del quadrilatero ABCD. Riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD.

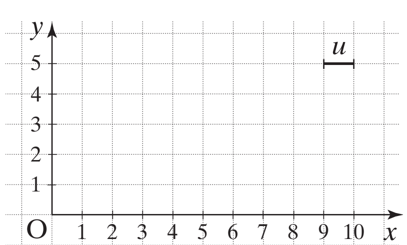


163 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti E(1; 1), F(6,5; 1), G(6,5; 5,5), I(1; 5,5). Unisci nell'ordine i punti. Determina la misura del perimetro del quadrilatero EFGI. Riconosci che tipo di quadrilatero è EFGI.

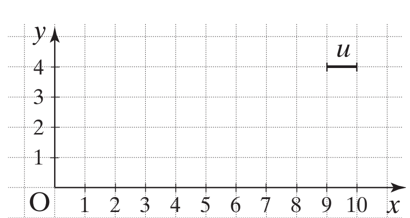
164 In un riferimento cartesiano determina la distanza dall'origine dei punti A(12; 5), B(7,5; 4), C(2,5; 6), D(7; 3). [13 *u*; 8,5 *u*; 6,5 *u*; ≈ 7,6 *u*]

165 In un riferimento cartesiano determina la distanza dall'origine dei punti E(12; 3,5), F(7,5; 10), G(8; 5), I(4,5; 6). [12,5 *u*; 12,5 *u*; ≈ 9,4 *u*; 7,5 *u*]

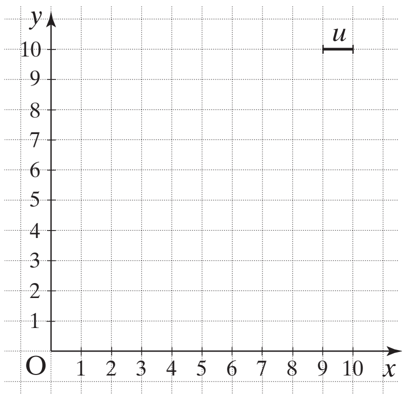
166 Nel riferimento cartesiano rappresenta i punti A(7; 0) e B(0; 5). Traccia il segmento AB e determina la misura della sua lunghezza. [≈ 8,6 *u*]



167 Nel riferimento cartesiano rappresenta i punti C(0; 2) e B(6; 0). Traccia il segmento CB e determina la misura della sua lunghezza. [≈ 6,3 *u*]



168 Nel riferimento cartesiano sotto riportato rappresenta i punti A(2; 0) e B(9,5; 10). Determina la lunghezza del segmento AB.



[12,5 u]

169 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti P(5; 0) e Q(0; 8). Determina la lunghezza del segmento PQ. [≈ 9,4 u]

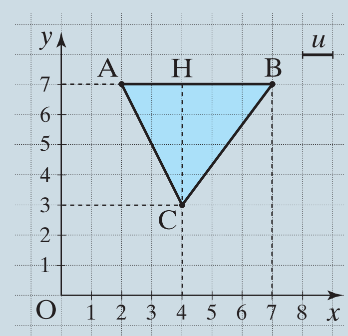
170 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti L(4; 0) e M(9; 5). Determina la lunghezza del segmento LM. [≈ 7,1 u]

171 In un riferimento cartesiano disegna il triangolo che ha come vertici i punti O(0; 0), A(12; 5) e B(5; 5). Determina la misura del suo perimetro e la sua area. [≈ 27,1 u; 17,5 u^2]

Esercizio risolto

172 ***In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(2; 7), B(7; 7), C(4; 3). Disegna il triangolo ABC, poi determina:***

- ***le coordinate di H, piede dell'altezza relativa al lato AB;***
- ***la lunghezza dell'altezza CH;***
- ***la lunghezza del perimetro di ABC;***
- ***che tipo di triangolo è ABC.***



Disegna il triangolo avente per vertici i punti indicati .
Dal punto C traccia l'altezza: indica con H il piede dell'altezza.
Osservando la figura puoi trovare che H(4; 7).

La lunghezza dell'altezza CH è la distanza tra i punti C e H, aventi la stessa ascissa, quindi :

$$\overline{CH} = y_H - y_C = 7\ u - 3\ u = 4\ u$$

Per determinare la lunghezza del perimetro di ABC, trova la lunghezza di ogni lato.

I punti A e B hanno la stessa ordinata, quindi:

$$\overline{AB} = x_B - x_A = 7\ u - 2\ u = 5\ u$$

Per determinare la lunghezza del lato BC, applica il teorema di Pitagora al triangolo CBH.

$$\overline{HB} = x_B - x_H = 7\ u - 4\ u = 3\ u$$

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{HB}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(3\ u)^2 + (4\ u)^2} = \sqrt{9\ u^2 + 16\ u^2} = \sqrt{25\ u^2} = 5\ u$$

Per determinare la lunghezza del lato AC, applica il teorema di Pitagora al triangolo CHA.

$$\overline{AH} = x_H - x_A = 4\ u - 2\ u = 2\ u$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{CH}^2} = \sqrt{(2\ u)^2 + (4\ u)^2} = \sqrt{4\ u^2 + 16\ u^2} = \sqrt{20\ u^2} \approx 4{,}47\ u$$

$$p_{ABCD} = 5\ u + 5\ u + 4{,}47\ u \approx 14{,}47$$

Poiché i lati AB e BC sono congruenti, il triangolo ABC è isoscele (di base AC).

173 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti D(2; 1), E(6; 2), F(2; 5). Disegna il triangolo DEF, poi determina:
- le coordinate del punto H, piede dell'altezza relativa al lato DF;
- la lunghezza dell'altezza EH;
- la lunghezza del perimetro e l'area di EFG;
- che tipo di triangolo è EFG.

[p ≈ 13,1 u; A = 8 u^2]

174 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti P(2; 2), Q(9,5; 2), R(2; 6). Disegna il triangolo PQR, poi determina la misura del perimetro e l'area di PQR. [20 u; 15 u^2]

175 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(1; 5), B(4; 5), C(6; 0). Disegna il triangolo ABC, poi determina la misura del perimetro e l'area di ABC. [≈ 15,5 u; 7,5 u^2]

176 Determina la lunghezza del perimetro del triangolo che ha come vertici i punti A(2; 3), B(8; 4), C(4; 7). [≈ 15,6 u]

177 Determina la misura del perimetro del triangolo che ha come vertici i punti P(1; 4), Q(5; 1), R(6; 7). [≈ 16,9 u]

178 In un riferimento cartesiano disegna il quadrilatero che ha come vertici i punti O, A(8; 0), B(5; 4), C(2; 4). Determina la misura del suo perimetro. [≈ 20,5 u]

179 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(4,5; 2), B(6,5; 2), C(6,5; 6), D(1,5; 6). Uniscili secondo l'ordine dato; riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD. Determina la misura del perimetro e l'area di ABCD. [16 u; 14 u^2]

180 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(2; 1), B(6; 1); C(7; 4), D(1; 4). Uniscili secondo l'ordine dato; riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD. Determina la misura del perimetro e l'area di ABCD. [16,3 u; 15 u^2]

181 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(2,5; 2), B(7,5; 2); C(6; 4), D(1; 4). Uniscili secondo l'ordine dato; riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD. Determina la misura del perimetro e l'area di ABCD. [15 u; 10 u^2]

182 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti E(1; 0), F(4; 4), G(4; 8), I(1; 4). Uniscili secondo l'ordine dato. Determina la misura del perimetro e l'area di EFGI. Che tipo di quadrilatero è EFGI? [18 u; 12 u^2]

183 In un riferimento cartesiano disegna il quadrilatero che ha come vertici i punti P(7; 0), Q(13; 4,5), R(7; 9), S(1; 4,5). Uniscili secondo l'ordine dato. Determina la misura del perimetro e l'area di PQRS. [30 u; 54 u^2]

184 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti T(0; 4), U(4; 0), V(8; 4), Z(4; 8). Uniscili secondo l'ordine dato. Determina la misura del perimetro e l'area di TUVZ. Che tipo di quadrilatero è TUVZ? [≈ 22,6 u; 32 u^2]

185 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(2; 1), B(4; 3), C(6; 0), D(6; 6), E(2; 6). Uniscili secondo l'ordine dato. Determina la misura del perimetro e l'area di ABCDE. [≈ 21,4 u; 17 u^2]

186 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti I(1; 2), L(1; 0), M(5; 4), N(3; 4). Uniscili secondo l'ordine dato. Determina la misura del perimetro di ILMN. [≈ 12,4 u]

Esercizi di Riepilogo

1 Completa.

a Il teorema di Pitagora esprime una .... che lega i .... e l'................. di un triangolo ....

b In un triangolo .... il quadrato costruito sull'................. è .... alla somma dei quadrati costruiti sui ....

c In un triangolo rettangolo l'area del quadrato costruito sull'ipotenusa è ....

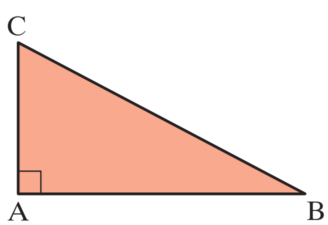
....

....

d La formula che permette di determinare la lunghezza dell'ipotenusa, conoscendo le lunghezze dei cateti è i = ...

e La formula che permette di determinare la lunghezza di un cateto, conoscendo le lunghezze dell'altro cateto e dell'ipotenusa è c_1 = ...

2 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 12 cm e 22,5 cm. Determina la lunghezza del perimetro.



Dati

$\overline{AC}$ = 12 cm

$\overline{AB}$ = 22,5 cm

Domanda

p = ?

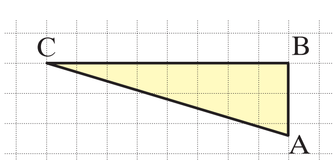
$\overline{CB} = \sqrt{......^2 + ...^2} = \sqrt{(.... \text{ cm})^2 + (.... \text{ cm})^2} =$

$= \sqrt{...... \text{ cm}^2 + ... \text{ cm}^2} = \sqrt{........} \text{ cm} = ... \text{ cm}$

p_{ABC} = ... = 60 cm

Osserva la figura, i dati e risolvi.

3



Dati

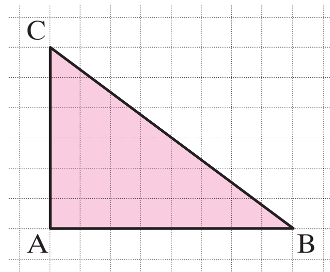
$\overline{AB}$ = 14 cm

$\overline{BC}$ = 48 cm

Domanda

$\overline{AC}$ = ?

4



Dati

$\overline{AC}$ = 22,5 cm

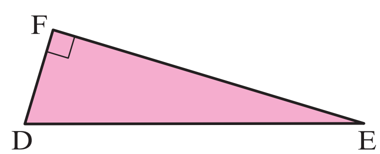
$\overline{BC}$ = 37,5 cm

Domanda

A_{ABC} = ?

p_{ABC} = ?

5 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura 20,5 cm e un cateto misura 4,5 cm. Determina la lunghezza del perimetro del triangolo.



Dati

..... = 20,5 cm

..... = 4,5 cm

Domanda

..... = ?

$..... = \sqrt{\overline{ED}^2 - ......^2} = \sqrt{.........^2 - ....^2} =$

$= \sqrt{420{,}25 \text{ cm}^2 - ...... \text{ cm}^2} = \sqrt{.........} \text{ cm} = ... \text{ cm}$

p_{DEF} = ... = 45 cm

6 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 30 cm e 12,5 cm. Determina l'area del triangolo e la misura del perimetro.

[187,5 cm^2; 75 cm]

7 Una terna pitagorica è una terna di numeri interi tali che ....
Da una terna pitagorica se ne possono ottenere infinite altre ....

8 Completa la tabella.

a	b	c	a^2	b^2	a^2+b^2	c^2	Terna pitagorica: sì o no?	Terna primitiva: sì o no?
7	24	25						
60	80	100						
36	15	39						
12	35	37						
24	30	36						

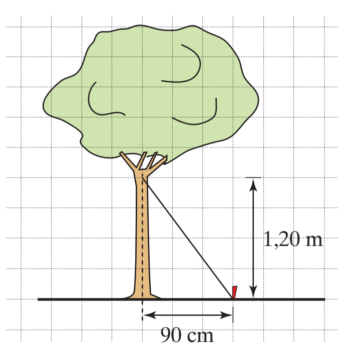
9 Riconosci tra le seguenti terne quelle pitagoriche e, tra queste ultime, quelle primitive.

9	40	41	12	35	37	27	36	45
24	30	36	64	120	136	13	84	85

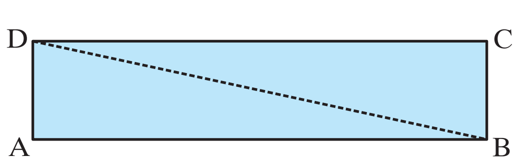
10 Un triangolo ha i cateti lunghi 8 cm, 31,5 cm e 32,5 cm. È rettangolo? .... Perché? ....
....

11 Si vuole costruire un triangolo rettangolo. Si hanno già due asticciole lunghe 21 cm e 28 cm, che vengono utilizzate come cateti del triangolo. Di quale lunghezza deve essere ritagliata la terza asticciola?

12 Un giardiniere ha appena piantato un albero. Per evitare che il vento lo danneggi vuole montare 4 tiranti. Ogni tirante parte da un anello posizionato sul tronco a un'altezza di 1,2 m dal terreno e arriva al piolo piantato a una distanza di 90 cm dalla base dell'albero. Quanto deve essere lungo il tratto di filo con cui si vuole realizzare il tirante, se per ogni estremità sono necessari 10 cm per il fissaggio all'anello e al piolo? [170 cm]



13 Osserva la figura e i dati, poi risolvi il problema.



Dati

$\overline{AB}$ = 99 cm

$\overline{DB}$ = 101 cm

Domanda

$\overline{AD}$ = ?

14 Un rettangolo ha la diagonale e un lato lunghi rispettivamente 34 cm e 30 cm. Determina la lunghezza del perimetro del rettangolo. [92 cm]

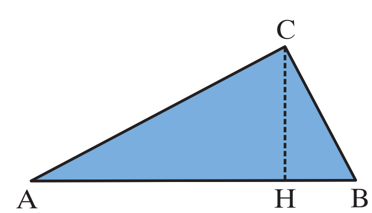
15 Il perimetro di un rettangolo è lungo 98 cm e la base è lunga 40 cm. Determina la lunghezza della sua diagonale. [41 cm]

16 Il perimetro di un quadrato è lungo 92 cm. Determina la lunghezza della diagonale. [≈ 32,5 cm]

17 In un triangolo isoscele il lato è lungo 8,5 cm e la base 8 cm. Determina l'area del triangolo. [30 cm^2]

18 Un triangolo isoscele ha l'area di 420 cm^2 e l'altezza lunga 35 cm. Determina la misura del perimetro. [98 cm]

19 Osserva la figura e i dati, poi risolvi il problema.



Dati

$\overline{AH}$ = 20 cm

$\overline{HB}$ = 8 cm

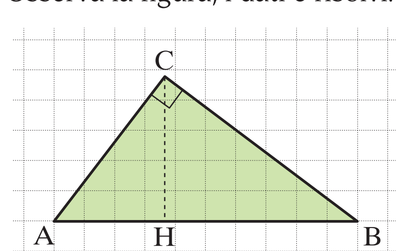
$\overline{CH}$ = 15 cm

Domanda

p_{ABC} = ?

[70 cm]

20 Osserva la figura, i dati e risolvi.



Dati

$\overline{AB}$ = 15 cm

$\overline{CB}$ = 12 cm

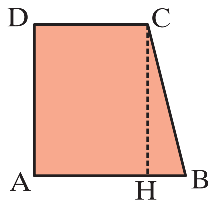
Domanda

$\overline{CH}$ = ?

$\overline{AH}$ = ?

$\overline{HB}$ = ?

21 Osserva la figura e i dati, poi risolvi il problema.



Dati	Domanda
$\overline{AD} = 20$ cm	$p_{ABCD} = ?$
$\overline{DC} = 15$ cm	
$\overline{HB} = 4{,}5$ cm	

[75 cm]

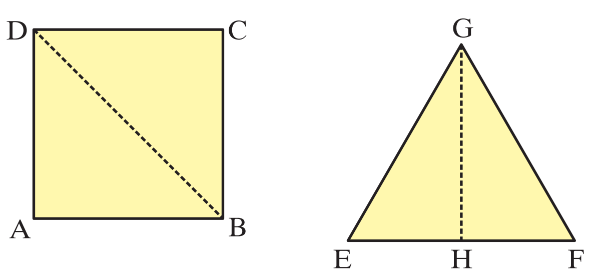
22 In un trapezio isoscele la base minore e quella maggiore misurano rispettivamente 10 cm e 19 cm; l'area è 87 cm^2. Determina la lunghezza del perimetro. [44 cm]

23 Un rombo ha le diagonali lunghe 7 cm e 24 cm. Determina la lunghezza del suo perimetro. [50 cm]

24 Un rombo ha l'area di 504 cm^2 e una diagonale lunga 16 cm. Determina la lunghezza del perimetro. [130 cm]

25 In un parallelogramma la diagonale minore è lunga 70 cm ed è perpendicolare al lato minore, lungo 52,5 cm. Calcola la lunghezza del perimetro del parallelogramma. [280 cm]

26 Completa.



$\overline{DB} = \ldots\ldots\ \overline{AB}$ $\overline{GH} = \ldots\ldots\ \overline{EG}$

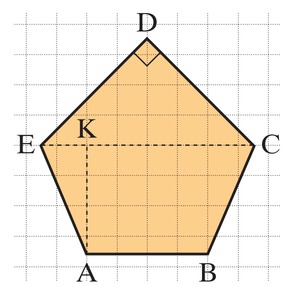
$\overline{AB} = \ldots\ldots\ \overline{DB}$ $\overline{EG} = \ldots\ldots\ \overline{GH}$

27 Un quadrato ha il perimetro lungo 140 cm. Determina la lunghezza della diagonale.

28 La diagonale di un quadrato è lunga 20 cm. Determina l'area e la lunghezza del perimetro. [p = 56,6 cm]

29 Un triangolo equilatero ha il perimetro lungo 108 cm. Determina l'area. [≈ 561 cm^2]

30 Traduci la situazione illustrata dalla figura e dai dati in un testo di problema con linguaggio chiaro e appropriato. Risolvi poi il problema.



Dati	Domanda
$\overline{AB} = 20$ cm	$A_{ABCDE} = ?$
$\overline{AE} = 19{,}5$ cm	$p_{ABCDE} = ?$
$\overline{AK} = 18$ cm	
$\overline{CD} = \overline{DE}$	

[801,25 cm^2; ≈ 108,5 cm]

31 In un compasso la distanza tra il punto attorno al quale avviene la rotazione, detto cerniera, e ogni punta misura 18 cm. Supponi che il compasso sia aperto e la distanza fra le punte sia di 8 cm. A quale distanza dal foglio si trova la cerniera? [≈ 17,5 cm]

32 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(3,5; 1) e B(1; 7). Determina la loro distanza. [6,5 u]

33 In un riferimento cartesiano disegna il triangolo che ha come vertici i punti O, A(12; 5), B(5; 5). Determina la misura del suo perimetro e la sua area. [≈ 27,1 u; 17,5 u^2]

34 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(2,5; 1), B(8,5; 1), C(6; 7), D(0; 7). Riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD e determina la misura del suo perimetro. [25 u]

35 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(0,5; 1), B(5; 1), C(5; 3), D(0,5; 9). Riconosci che tipo di quadrilatero è ABCD e determina la misura del suo perimetro. [22 u]

36 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(0; 1), B(12; 4,5), C(0; 8). Riconosci che tipo di triangolo è ABC e determina la misura del suo perimetro. [32 u]

SOLUZIONI A PAG. 298

Autoverifica

Unità 2 Il teorema di Pitagora

1 Completa.

a Il teorema di Pitagora afferma che
"..
....
...."

b Applicando il teorema di Pitagora a un triangolo rettangolo si può determinare la lunghezza di un lato conoscendo la lunghezza degli altri due, usando le formule:

i = ...

c_1 = ...

c_2 = ...

2 In un triangolo rettangolo i cateti sono lunghi 14 cm e 48 cm. Calcola la misura del suo perimetro.

3 Un triangolo ha i lati che misurano rispettivamente 45 mm, 117 mm e 108 mm. Stabilisci se è un triangolo rettangolo oppure no.

4 Osserva la figura, i dati e risolvi.

Dati

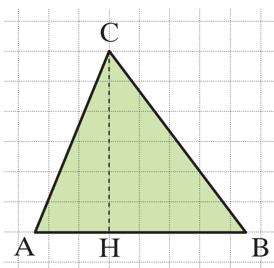
$\overline{AC} = 5{,}2$ cm

$\overline{CH} = 4{,}8$ cm

$\overline{CB} = 6$ cm

Domanda

$p_{ABC} = ?$



5 Il perimetro di un rettangolo è 196 mm, la sua base è congruente a $\frac{3}{4}$ dell'altezza. Determina la lunghezza della diagonale.

6 Stabilisci quale delle seguenti lunghezze è maggiore:
– la diagonale di un quadrato avente l'area di 1444 cm^2;
– l'altezza di un triangolo equilatero avente il perimetro di 180 cm.

7 Un trapezio rettangolo ha la diagonale minore, lunga 32 cm, perpendicolare al lato obliquo, lungo 24 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio.

8 In un rombo il perimetro misura 200 mm e una diagonale è lunga 28 mm. Determina la sua area.

9 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(6; 2) e B(3; 6). Determina la lunghezza del segmento AB.

	Conoscenze	Abilità								Calcola il tuo punteggio	
Esercizio	1	2	3	4	5	6	7	8	9		Se il tuo punteggio è inferiore a 6, svolgi gli esercizi di recupero.
Vale punti	6	3	4	4	5	5	5	4	4		
Il mio punteggio		+	+	+	+	+	+	+	+ =	$\frac{....}{40} \times 10 =$	

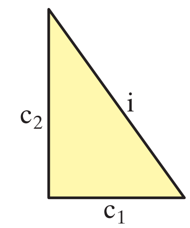
Esercizi di Recupero

1 Osserva la figura e completa.

a Il teorema di Pitagora esprime una relazione tra i .... di un triangolo ....

b le formule per determinare un lato di un triangolo rettangolo, conoscendo gli altri due, sono:

$i = \sqrt{c_1^2 + ...}$ $\qquad c_1 = \sqrt{i^2 - .....}$ $\qquad c_2 = \sqrt{..... - c_1^2}$



2 Seguendo l'esempio, stabilisci quali possono essere tra le seguenti terne di misure di segmenti espresse in centimetri, i lati di un triangolo rettangolo.

(Se un triangolo è rettangolo, tra i suoi lati esiste la relazione espressa dal ....)

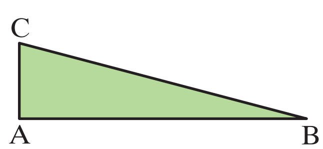
a	12	15	18	$12^2 + 15^2 = 144 + 225 = 369$	$18^2 = 324$	NO
b	12	16	20	$12^2 + 16^2 = 144 + ... = ...$	$.....^2 = ...$	....
c	15	8	17	....	....	....
d	72	21	75	....	....	....
e	23	28	17	....	....	....
f	40	50	60	....	....	....
g	52	48	20	....	....	....

3 In un triangolo rettangolo i cateti sono lunghi 9 cm e 40 cm. Determina la misura del perimetro.

Dati

$\overline{AB}$ = ...

$\overline{AC}$ = ...



Domanda

$p_{ABC} = ?$

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + ...^2} = \sqrt{......^2 + ...^2}$

$= \sqrt{...... + ...} = \sqrt{......} = ...$ cm

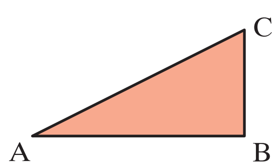
p_{ABC} = ...

4 In un triangolo rettangolo l'ipotenusa e un cateto misurano rispettivamente 7,5 cm e 2,1 cm. Determina l'area del triangolo.

Dati

.... = 7,5 cm

.... = 2,1 cm



Domanda

$A_{ABC} = ?$

$...... = \sqrt{......^2 - ......^2} = \sqrt{......^2 - ......^2}$

$= \sqrt{...... - ......} = \sqrt{......} = ...$ cm

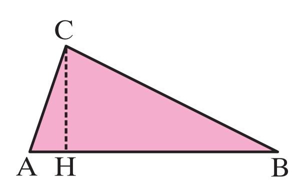
A_{ABC} = ...

5 In un triangolo rettangolo i cateti misurano 13,6 cm e 25,5 cm. Determina la lunghezza dell'altezza relativa all'ipotenusa.

Dati

.... = 13,6 cm

.... = 25,5 cm



Domanda

...... = ?

$\overline{AB} = \sqrt{......^2 - ......^2} = \sqrt{......^2 - ......^2} =$

$= \sqrt{...... + ...} = \sqrt{......} = ...$ cm

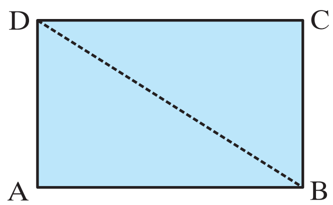
$\overline{AC} \cdot \overline{CB} = ... \cdot .... = ...$ cm^2 (doppia area $A\hat{B}C$)

...... : $\overline{AB}$ = ... cm ($\overline{CH}$)

Gli ultimi due passaggi possono essere riassunti in un'unica formula:

altezza relativa all'ipotenusa $= \dfrac{c_1 \cdot c_2}{....}$

6 La base e la diagonale di un rettangolo misurano rispettivamente 37,5 cm e 42,5 cm. Determina la lunghezza del perimetro e l'area del rettangolo.



Dati

.... = 37,5 cm

.... = 42,5 cm

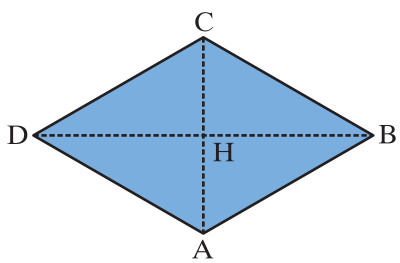
Domanda

...... = ?

...... = ?

$\overline{AD}$ = ...

7 In un rombo le diagonali misurano 42 cm e 56 cm. Determina la lunghezza del perimetro del rombo.



Dati

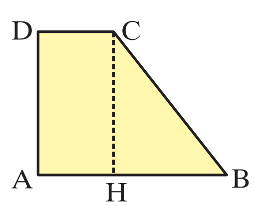
.... = 42 cm

.... = 56 cm

Domanda

...... = ?

8 In un trapezio rettangolo le basi misurano 3,9 cm e 11,1 cm. Determina l'area del trapezio, sapendo che il lato obliquo misura 12 cm.



Dati

.... = 3,9 cm

.... = 11,1 cm

.... = 12 cm

Domanda

...... = ?

$\overline{HB}$ = 11,1 cm - ...... = ... cm

$\overline{CH} = \sqrt{......^2 - ......^2} = \sqrt{......^2 - ......^2}$

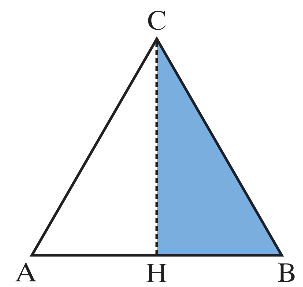
$= \sqrt{...... - ......} = \sqrt{......} =$ ...... cm

A_{ABDC} = ...

9 In un rombo il perimetro e una diagonale misurano rispettivamente 44 cm e 13,2 cm. Determina l'area del rombo.

10 In un trapezio isoscele le basi e l'altezza misurano rispettivamente 20,3 cm, 4,7 cm e 10,4 cm. Determina la lunghezza del perimetro del trapezio.

11 In un triangolo equilatero il perimetro misura 96 cm. Determina la sua area.



Dati

.... = 96 cm

Domanda

...... = ?

$\overline{AB}$ = ... : ... = ... cm

$\overline{HB}$ = ...

$\overline{CH} = \sqrt{......^2 - ......^2} = \sqrt{......^2 - ......^2}$

$= \sqrt{...... - ......} = \sqrt{......} =$ ...... cm

A = ...

L'altezza di un triangolo equilatero si può anche determinare con la formula che riassume il teorema di Pitagora $h = \frac{\sqrt{...} \cdot l}{2}$.

12 L'area di un quadrato è 1225 cm^2. Determina la lunghezza della sua diagonale.

[La diagonale di un quadrato si può anche determinare con la formula che riassume il teorema di Pitagora $h = \sqrt{...} \cdot l$.]

13 In un riferimento cartesiano rappresenta i punti A(1; 2) e B(7; 10). Determina la lunghezza del segmento AB.